Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 4

13. Flüsse von Vektorfeldern
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Kurve $\gamma : (-1, 1) \to M$ heisst glatt, wenn γ glatt ist und $\mathrm{d}\gamma|_t \not\equiv 0 \ \forall t \in (-1, 1)$. Eine glatte Kurve γ heisst Integralkurve oder Flusslinie eines Vektorfeldes $X \in \mathcal{X}(M)$, wenn $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in (-1, 1)$ gilt. Für ein beliebiges $p \in M$ kann man zeigen, dass es in einer Umgebung $U(p) \subset M$ eine eindeutige Lösung $\gamma(t) = \phi(t, p)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, zu dieser Differentialgleichung gibt, die bei $t = 0$ durch p geht. Man nennt die Abbildung $\phi_t : M \to M, p \mapsto \phi_t(p) := \phi(t, p)$ den von X erzeugten Fluss. Zeigen Sie für alle t, für die ϕ_t definiert ist:

   (a) (1 Punkt) $\phi_0 = \mathrm{id}, \phi_t \circ \phi_{t'} = \phi_{t+t'}$ für alle t, t', für die beide Seiten definiert sind.
   (b) (1 Punkt) $\phi_t : M \to M$ ist überall differenzierbar.
   (c) (1 Punkt) $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.
   (d) (1 Punkt) Sei $Y \in \mathcal{X}(M)$ ein weiteres Vektorfeld. $\mathrm{d}\phi_{-t}\left(Y|_{\phi_t(p)}\right) \in T_pM$ ist wohldefiniert für alle $p \in M$.

14. (4 Punkte) Lie–Ableitung von Vektorfeldern
Seien M, X, Y und ϕ wie in Aufgabe 13. Die Lie–Ableitung von Y entlang des Flusses ϕ von X ist definiert durch:
$$L_X Y|_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{d}\phi_{-t}\left(Y|_{\phi_t(p)}\right) - Y|_p\right) \qquad \forall p \in M$$
Zeichnen Sie die Verschiebung des Vektors Y entlang der Flusslinie von X auf. Zeigen Sie in lokalen Koordinaten von M, dass $L_X Y = [X, Y]$, indem Sie ϕ_t für kleine t um p entwickeln und das Resultat aus Aufgabe 10(a) benutzen: $[X, Y](f) = \sum_{i,j} \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

15. Tangentialbündel und Normalenbündel auf S^2

   (a) (2 Punkte) Für eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^{n+k}$, also $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \ \forall p \in M$, bezeichne $TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k} | p \in M, v \in T_pM\} \subset \mathbb{R}^{2n+2k}$ das Tangentialbündel $TM \xrightarrow{\pi} M$ von M mit der kanonischen Projektion $\pi(p, v) = p$. Zeigen Sie, dass TM eine $2n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+2k}$ ist.

(b) (2 Punkte) Sei $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre aufgefasst als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ wie in Aufgabe (a). Sei N_pS^2 das orthogonale Komplement zu T_pS^2 bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$. Definieren Sie das Normalenbündel $NS^2 \to S^2$ als Vektorbündel $NS^2 = \bigsqcup_{p \in S^2} N_pS^2$. Zeigen Sie, dass NS^2 ein triviales Vektorbündel ist, d.h. NS^2 ist diffeomorph zu $S^2 \times \mathbb{R}$.

16. Glatte Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten
Sei $P \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Falls $f \in \mathcal{F}(M)$, dann ist die Einschränkung auf P, $f|_P \in \mathcal{F}(P)$ glatt.

(b) (2 Punkte) Ist $f \in \mathcal{F}(P)$, dann existiert für jedes $p \in P$ eine Koordinatenumgebung $U \subset M$ von M und eine glatte Fortsetzung $\widetilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ durch 0 mit $\widetilde{f}|_{P \cap U} = f|_{P \cap U}$ und $\widetilde{f}(q) = 0$ für alle $q \notin U$.

Abgabetermin: Mittwoch, 21. 11. 2007 um 10:00 Uhr.