Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 5

17. (4 Punkte) Übergangsabbildungen von Vektorbündeln
Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel vom Rang k über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ von M seien $\phi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_i)$ lokale Trivialisierungen. Zeigen Sie, dass die induzierten Übergangsabbildungen $t_{ij}(p) = \left(\phi_i \circ \phi_j^{-1}\right)(p, \cdot) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ für alle $p \in U_i \cap U_j$ $\mathbb{R}$-linear sind.

18. Geradenbündel auf S^1
Sei $\mathcal{U} = \{U_1 = (0, 2\pi), U_2 = (-\pi, \pi)\}$ eine offene Überdeckung von $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, so dass $U_1 \cap U_2 = A \cup B$ mit $A = (0, \pi)$ und $B = (\pi, 2\pi)$.

   (a) (1 Punkt) Sei $L_1 \xrightarrow{\pi_1} S^1$ das triviale Vektorbündel $S^1 \times \mathbb{R}$ vom Rang 1. Die lokalen Trivialisierungen $\phi_i : U_i \times \mathbb{R} \to \pi_1^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$ seien durch $\phi_i(\theta, x) = x \in (L_1)_\theta \cong \mathbb{R}$ gegeben, wobei $(L_1)_\theta$ die Faser über dem Punkt $\theta \in U_i$ bezeichnet. Geben Sie die Übergangsabbildung für $\theta \in A$ und für $\theta \in B$ an.

   (b) (1 Punkt) Finden Sie ein nicht–triviales Vektorbündel $L_2 \xrightarrow{\pi_2} S^1$ vom Rang 1, indem Sie für $\theta \in U_1$ dieselbe lokale Trivialisierung wie in Aufgabe a), und für $\theta \in U_2$ eine neue lokale Trivialisierung nehmen. Geben Sie wiederum die Übergangsabbildung an. Geben Sie eine anschauliche Beschreibung von L_2.

   (c) (1 Punkt) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $E_a \xrightarrow{\pi_a} M$, $a = 1, 2$, zwei Vektorbündel vom Rang r_a mit Übergangsabbildungen $t_{ij}^{E_a}$. Die Whitney–Summe $E_1 \oplus E_2 \xrightarrow{\pi} M$ ist definiert als
$$E_1 \oplus E_2 = \{(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 | \pi_1(u_1) = \pi_2(u_2)\}.$$
Zeigen Sie, dass die Übergangsabbildungen von $E_1 \oplus E_2$ die Form $t_{ij}^{E_1 \oplus E_2} = \begin{pmatrix} t_{ij}^{E_1} & 0 \\ 0 & t_{ij}^{E_2} \end{pmatrix}$ haben.

   (d) (1 Punkt) Finden Sie zwei linear unabhängige Schnitte von $L_2 \oplus L_2$, die nirgends verschwinden. (Daraus folgt, dass $L_2 \oplus L_2$ trivial ist.)

19. Eigenschaften von Untermannigfaltigkeiten

    (a) (2 Punkte) Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $P \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Ist $f : M \to N$ glatt, so dass $f(M) \subset P$, dann ist auch $f : M \to P$ glatt.

    (b) (2 Punkte) Sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $P \subset N$ eine Untermenge. Zeigen Sie, dass P dann auf höchstens eine Art zu einer Untermannigfaltigkeit gemacht werden kann.

20. (4 Punkte) Veronese–Einbettung
    Zeigen Sie, dass

$$V_{n-1} = \{A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) | A^2 = A, A^T = A, \mathrm{Rang} A = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ diffeomorph zum $\mathbb{RP}^n$, der in Aufgabe 4 definiert wurde, ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 28. 11. 2007 um 10:00 Uhr.