Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 6

21. (4 Punkte) Rekonstruktion von Vektorbündeln aus ihren Übergangsabbildungen
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $F = \mathbb{R}^n$, und $t_{ij}(p) : F \to F$ glatte, lineare Abbildungen für alle $p \in M$, $i, j \in I$, die folgende Bedingungen erfüllen: $t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$ für $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$ und $t_{ii}(p) = \mathrm{id}$. Wir definieren $X = \bigcup_{i\in I} U_i \times F$ und führen eine Äquivalenzrelation zwischen $(p, f) \in U_i \times F$ und $(q, f') \in U_j \times F$ ein, indem wir sagen, dass $(p, f) \sim (q, f')$ genau dann, wenn $p = q$ und $f' = t_{ij}(p)f$. Schliesslich definieren wir $E = X/\sim$. Ein Punkt in E wird mit $[(p, f)]$ bezeichnet. Dann haben wir eine Projektion $\pi : E \to M, [(p, f)] \mapsto p$ und Abbildungen $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i), (p, f) \mapsto [(p, f)]$. Zeigen Sie, dass $E, \pi, \{\phi_i\}_{i\in I}$ ein eindeutig bestimmtes Vektorbündel definieren.

22. Die Pullback–Abbildung
Seien M, N und f wie in Aufgabe 9. Die Abbildung $f : M \to N$ induziert eine Abbildung $f^* : T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$ wie folgt: Sei $(\cdot,\cdot)_M$: $T^*_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ die natürliche Paarung, analog für N. Dann ist f^* definiert durch $(f^*\theta, X)_M = (\theta, \mathrm{d}f_p(X))_N$ für alle $\theta \in T^*_{f(p)}N$ und alle $X \in T_pM$.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f^* bezüglich der Basen $\{\mathrm{d}x^i|_p\}_{i=1}^m$ für T^*_pM und $\left\{\mathrm{d}y^j|_{f(p)}\right\}_{j=1}^n$ für $T^*_{f(p)}N$.

    (b) (2 Punkte) Sei P eine glatte Mannigfaltigkeit und $g : N \to P$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass für den Pullback der zusammengesetzten Abbildung $g \circ f : M \to P$ gilt:
    $$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$
    Beachten Sie den Unterschied zum Resultat in Aufgabe 9(b).

23. p-Formen und äusseres Produkt
Sei $\Lambda^p(M) = \{\theta \in \mathcal{T}^p_0(M) | \theta(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -\theta(\dots, Y, \dots, X, \dots), \forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)\}$ der Raum der Differentialformen der Ordnung p, kurz p-Formen, sowie $\Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M)$. Wir definieren das äussere Produkt $\wedge : \Lambda^p(M) \times \Lambda^q(M) \to \Lambda^{p+q}(M), (\omega, \theta) \to \omega \wedge \theta$ durch
$$(\omega \wedge \theta)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \mathrm{sgn}(\pi)\omega\big(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)}\big)\, \theta\big(X_{\pi(p+1)}, \dots, X_{\pi(p+q)}\big)\,,$$

wobei $X_i \in \mathcal{X}(M)$, und S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen ist. Zeigen Sie, dass für $\omega \in \Lambda^p(M), \theta \in \Lambda^q(M), \eta \in \Lambda^r(M)$ gilt:

(a) (1 Punkt) $\omega \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge \omega$.

(b) (1 Punkt) $(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \omega \wedge (\theta \wedge \eta)$.

(c) (1 Punkt) $\omega \wedge \theta = \frac{1}{2} (\omega \otimes \theta - \theta \otimes \omega)$.

(d) (1 Punkt) Sei $\mathrm{d}x^1|_p, \ldots, \mathrm{d}x^m|_p$ eine Basis für $T_p^* M = \Lambda^1(M)|_p$ für $p \in M$. Bestimmen Sie eine Basis für $\Lambda^q(M)|_p$ und geben Sie die Dimension von $\Lambda^q(M)|_p$ für jedes $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ an.

24. Äussere Ableitung
Die äussere Ableitung ist eine Abbildung $\Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$, die der p–Form $\omega = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$ die $(p+1)$–Form

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p,i} \left(\partial_i \omega_{i_1,\ldots,i_p}\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

zuordnet. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (1 Punkt) $\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\theta, \qquad \omega \in \Lambda^p(M), \theta \in \Lambda^q(M)$

(b) (1 Punkt) $\mathrm{d}\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$, $\omega \in \Lambda^1(M), X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

(c) (2 Punkte) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Abgabetermin: Mittwoch, 5. 12. 2007 um 10:00 Uhr.