Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 7

25. Volumenelement
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir definieren das Volumenelement dvol_M bezüglich lokaler Koordinaten auf $U \subset M$ durch $\mathrm{dvol}_M|_U = \sqrt{|\det g|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \Lambda^n(U)$, mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 23.

    (a) (2 Punkte) Unter welcher Voraussetzung ist dvol_M global wohldefiniert, d.h. kompatibel mit Verkleben unter Kartenwechseln ?

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Volumenelement von S^2 in Polarkoordinaten (θ, ϕ).

26. Isometrien
Es seien (M, g) und (N, h) semi–Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ ein (lokaler) Diffeomorphismus. f heisst (lokale) Isometrie, falls $h_{f(p)}(\mathrm{d}f_p(X), \mathrm{d}f_p(Y)) = g_p(X_p, Y_p)$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und alle $p \in M$.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge aller Isometrien $f : M \to M$ eine Gruppe bildet.

    (b) (2 Punkte) Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ der Dimension n bezeichnet man die Einschränkung der Standardmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^{n+k}$ auf M, $g|_p = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_pM \times T_pM}$ als erste Fundamentalform. Es sei nun g die erste Fundamentalform auf $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Riemannsche Metrik $\bar{g}$ gibt, für welche die Projektionsabbildung $\pi : (S^n, g) \to (\mathbb{RP}^n, \bar{g})$, $p \to [p]$ (cf. Aufgabe 4(b)) eine lokale Isometrie ist.

27. Die Veronese–Einbettung als Isometrie

    (a) (1 Punkt) Es sei $M = \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Zeigen Sie, dass $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(AB^T\right)$ eine Metrik auf M ist.

    (b) (3 Punkte) Es sei $V_{n-1} \subset M$ die in Aufgabe 20 definierte Untermannigfaltigkeit. Sei $\tilde{g}$ die erste Fundamentalform von $V_{n-1} \subset M$. Zeigen Sie: Der Diffeomorphismus $f : (\mathbb{RP}^{n-1}, \bar{g}) \to (V_{n-1}, \tilde{g})$ ist eine Isometrie, wobei $\bar{g}$ in Aufgabe 26 definiert wurde.

28. Hyperbolische Ebene

(a) (2 Punkte) Es sei $M = \mathbb{R}^3$ mit $g = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ und $P = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 | -{x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 = -1, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ die hyperbolische Ebene. Zeigen Sie, dass P mit der induzierten Metrik eine semi–Riemannsche Untermannigfaltigkeit ist.

(b) (2 Punkte) Sei $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ die obere Halbebene und $h = \frac{1}{y^2} (\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)$ die Poincaré–Metrik auf H. Zeigen Sie, dass (P, g) und (H, h) isometrisch sind.
Gehen Sie dazu zu komplexen Koordinaten $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ über und finden eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ für geeignete $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc = 1$, so dass $D = f(H) = \{w \in \mathbb{C} || w| < 1\}$ eine Kreisscheibe ist, und bestimmen Sie die induzierte Metrik auf D. (Es genügen jeweils drei Punkte auf H und D, um a, b, c, d festzulegen.) Finden Sie dann eine geeignete Parametrisierung von P, die einen Diffeomorphismus zu D liefert.

Abgabetermin: Mittwoch, 12. 12. 2007 um 10:00 Uhr.