Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 8

29. (4 Punkte) Christoffelsymbole der Schwarzschildmetrik
Es sei $g = -h(r)\mathrm{d}t^2 + h(r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)$ die Schwarzschildmetrik auf $S_M = \{(t,r,\theta,\phi)|t \in \mathbb{R}, r \in (0,2M), \theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi)\} \subset \mathbb{R}^4$ mit $h(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole von g.

30. Hessesche Abbildung auf semi–Riemannschen Mannigfaltigkeiten
Es sei M eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi–Civita–Zusammenhang D. Die Hessesche Abbildung einer Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ ist die zweite kovariante Ableitung: $H^f = D(Df)$. Zeigen Sie:

    (a) (1 Punkt) $H^f(X,Y) = XYf - (D_XY)f$ und $H^f(X,Y) = H^f(Y,X)$, falls der Zusammenhang D torsionsfrei ist.

    (b) (1 Punkt) $H^{fg} = fH^g + gH^f + \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g + \mathrm{d}g \otimes \mathrm{d}f$.

    (c) (1 Punkt) Wenn γ eine Geodätische ist, dann ist $H^f(\dot\gamma,\dot\gamma) = \frac{\mathrm{d}^2(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}s^2}$.

    (d) (1 Punkt) An einem kritischen Punkt von f stimmt H^f mit der Definition von Aufgabe 8 überein.

31. (4 Punkte) Basis von parallelen Vektorfeldern
Es sei γ eine Geodätische auf einer semi–Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension n, so dass $\{\gamma(t)|t \in (-1,1)\} \subset M$ eine semi–Riemannsche Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass parallele Vektorfelder $X_1,\ldots,X_n$ entlang γ existieren, so dass $X_1 = \alpha\dot\gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und die $X_i(t)$ für alle $t \in (-1,1)$ eine Orthonormalbasis von $T_{\gamma(t)}M$ bilden, d.h $\langle X_i(t), X_j(t)\rangle = \epsilon_i\delta_{ij}$, $\epsilon_i \in \{\pm1\}$ erfüllen.

32. Geodätische auf der Lie–Gruppe $\mathrm{SO}(n)$
Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definieren wir $\exp A = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!}A^i$ mit $A^0 = \mathbb{1}_n$. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen aus Aufgabe 12.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Reihe $\exp A$ für jedes $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ konvergiert und demzufolge eine Abbildung $\exp A : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert.

(b) (1 Punkt) Wir definieren durch $\gamma(t) = \exp(tA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(tA)^i : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine Kurve. Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ der Fluss ϕ_V eines links–invarianten Vektorfeldes X_V ist (cf. Aufgabe 13).

(c) (1 Punkt) Es sei nun im folgenden $A \in \mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | X^T + X = 0\}$. Zeigen Sie, dass $(\exp A)^{-1} = \exp(A)^T$ und $\exp A \in \mathrm{SO}(n)$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ konstante Geschwindigkeit $|\dot{\gamma}|$ hat, und dass $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(n)$ für $A \in \mathfrak{so}(n)$ eine Geodätische auf der Untermannigfaltigkeit $\mathrm{SO}(n)$ darstellt. (Die durch das Bild von γ erzeugte abelsche Gruppe heisst Ein–Parameter–Untergruppe von $\mathrm{SO}(n)$.)

Abgabetermin: Mittwoch, 19. 12. 2007 um 10:00 Uhr.