Prof. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Riemannsche Geometrie I
WS 07/08

Übungsblatt 9

33. (4 Punkte) Induzierter Zusammenhang
Es sei $(\widehat{M}, \widehat{g})$ eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi–Civita–Zusammenhang $\widehat{D}$, $M \subset \widehat{M}$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass der Zusammenhang der induzierten Metrik g auf M ebenfalls einen Levi–Civita–Zusammenhang D definiert.

34. Zweite Fundamentalform
Es seien $(\widehat{M}, \widehat{g}, \widehat{D})$, und (M, g, D) wie in Aufgabe 33. Weiter sei $N_f M = \mathrm{d}f(TM)^\perp$ das Normalenbündel zu M in $\widehat{M}$, wobei $f : M \to \widehat{M}$ die Einbettung ist (cf. Aufgabe 15b)). Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (2 Punkte) Es gibt genau einen symmetrischen Tensor $\mathrm{II} : TM \times TM \to N_f M$ (die zweite Fundamentalform), so dass die Gauss–Formel $\widehat{D}_X \mathrm{d}f(Y) = \mathrm{d}f(D_X Y) + \mathrm{II}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ gilt.

    (b) (2 Punkte) Es gibt genau einen Zusammenhang $D^\perp$ auf $N_f M$ und einen Tensor $A : TM \otimes N_f M^* \to TM$ (den Weingartenoperator), so dass $\widehat{D}_X s = -\mathrm{d}f(A_s X) + D^\perp s$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$ und alle $s \in \Gamma(N_f M)$, und dass $D^\perp$ ein metrischer Zusammenhang bezüglich der durch $\widehat{g}$ auf $N_f M$ induzierten Metrik ist.

35. Killingfelder
Es sei (M, g) eine semi–Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \to M$ eine glatte Abbildung, und $\phi_t(p) = \phi(t, p)$ eine Isometrie für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Dann heisst das Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ gegeben durch $p \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(p)\big|_{t=0}$ ein Killingfeld (infinitesimale Isometrie) auf M. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (1 Punkt) g erfüllt die Killing–Gleichung $g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) = 0$ für alle $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

    (b) (1 Punkt) Die Menge aller Killingfelder bildet eine Unteralgebra der Lie–Algebra $\mathcal{X}(M)$, d.h. einen Untervektorraum, der bezüglich der Lie–Klammer abgeschlossen ist.

    (c) (2 Punkte) Wenn γ eine Geodätische auf M ist, dann ist $\langle X, \dot{\gamma} \rangle$ konstant.

36. (4 Punkte) Killingfelder auf S^2

Sei $g = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi$ die Standardmetrik auf S^2. Stellen Sie die Killing–Gleichungen in den Koordinaten θ, ϕ auf und geben Sie eine allgemeine Lösung für das Killing–Feld $X = X^\theta \partial_\theta + X^\phi \partial_\phi$ an.

Abgabetermin: Mittwoch, 9. 1. 2008 um 10:00 Uhr.