Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 1

1. (a) (2 Punkte) Es sei I eine fast komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum V. Zeigen Sie, dass V in natürlicher Weise die Struktur eines komplexen Vektorraums zulässt.

   (b) (2 Punkte) Jede fast komplexe Struktur auf V induziert eine natürliche Orientierung auf V.

2. (4 Punkte) Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension 4. Zeigen Sie, dass die Menge aller kompatiblen fast komplexen Strukturen aus zwei Kopien der 2–Sphäre S^2 besteht.

3. Es sei I eine fast komplexe Struktur auf einem reellen Vektorraum V. Zeigen Sie, dass gilt:

   (a) (1 Punkt) $\bigwedge^{p,q} V \subset \bigwedge^{p+q} V_{\mathbb{C}}$ ist ein Unterraum.

   (b) (1 Punkt) $\bigwedge^k V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V_{\mathbb{C}}$.

   (c) (1 Punkt) $\overline{\bigwedge^{p,q} V} = \bigwedge^{q,p} V \qquad \forall\, p, q$

   (d) (1 Punkt) Es gibt eine natürliche Abbildung $\bigwedge^{p,q} V \times \bigwedge^{r,s} V \to \bigwedge^{p+r,q+s} V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$.

4. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension d, $e_1, \ldots, e_d$ sei eine Orthonormalbasis für V, und $\mathrm{vol} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \in \bigwedge^d V$ definiere eine Orientierung auf V. Schliesslich sei $*$ der Hodge–$*$–Operator definiert durch

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathrm{vol} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \bigwedge^\bullet V.$$

   Zeigen Sie, dass gilt:

   (a) (1 Punkt) Falls $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{d-k}\} = \{1, \ldots, d\}$, dann ist

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = \varepsilon \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-k}},$$

   wobei $\varepsilon = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{d-k})$. Insbesondere ist $*1 = \mathrm{vol}$.

(b) (1 Punkt) $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle \qquad \forall\, \alpha \in \bigwedge^k V$.

(c) (2 Punkte) $\left(*|_{\bigwedge^k V} \right)^2 = (-1)^{k(d-k)}$.

Abgabetermin: Mittwoch, 29. 10. 2008 um 10:00 Uhr.