Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 10

37. (4 Punkte) Es sei E ein komplexes Vektorbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M. Es sei ∇ ein Zusammenhang auf E, so dass $\nabla^{0,1}\circ\nabla^{0,1} = 0$. Zeigen Sie, dass E eine eindeutige holomorphe Struktur besitzt, so dass $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

38. Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel versehen mit Zusammenhängen ∇_1 und ∇_2. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (1 Punkt) Die Krümmung des induzierten Zusammenhangs auf der direkten Summe $E_1 \oplus E_2$ ist $F = F_{\nabla_1} \oplus F_{\nabla_2}$.

    (b) (1 Punkt) Auf dem Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$ ist die Krümmung des induzierten Zusammenhangs $F = F_{\nabla_1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes F_{\nabla_2}$.

    (c) (1 Punkt) Für den induzierten Zusammenhang auf dem dualen Bündel E^* gilt $F_{\nabla^*} = -F_{\nabla}^T$.

    (d) (1 Punkt) Die Krümmung des Pull-Back-Zusammenhangs $f^*\nabla$ eines Zusammunghangs ∇ unter einer differenzierbaren Abbildung $f : M \to N$ ist $F_{f^*\nabla} = f^*F_{\nabla}$.

39. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Krümmung F des Chern–Zusammenhangs auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ bezüglich der natürlichen Hermitschen Struktur h gilt: $\frac{i}{2\pi}F = \omega_{\mathrm{FS}}$.

    (b) (2 Punkte) Es sei L ein global erzeugtes holomorphes Geradenbündel auf X und $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ die assoziierte Einbettung. Sei φ^*h der Pull–Back der natürlichen Hermitschen Struktur h auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Zeigen Sie, dass für die Krümmung F des Chern–Zusammenhangs bezüglich φ^*h auf L gilt: $\frac{i}{2\pi}F = \varphi^*\omega_{\mathrm{FS}}$.

40. (4 Punkte) Es sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X. Nehmen Sie an, dass L eine Hermitesche Struktur zulässt, deren Chern–Zusammenhang positive Krümmung hat. Zeigen Sie, dass X Kähler ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 22. 1. 2009 um 14:00 Uhr.