Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 7

25. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $2n$ versehen mit einer kompatiblen fast komplexen Struktur I. Betrachten Sie für die folgenden linearen Operatoren auf $\bigwedge^\bullet V^*$: den Lefschetz–Operator L, sein Duales Λ und den Zähloperator H mit $H\alpha = (k-n)\alpha$ für alle $\alpha \in \bigwedge^k V^*$.

    (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt:

    $$[H, L] = 2L, \qquad [H, \Lambda] = -2\Lambda, \qquad [L, \Lambda] = H$$

    Benutzen Sie für die dritte Gleichung eine Induktion nach der Dimension von V. Setzen Sie dazu voraus, dass es eine Zerlegung $V = W_1 \oplus W_2$ gibt, die mit dem Skalarprodukt und der fast komplexen Struktur kompatibel ist.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die dritte Gleichung wie folgt verallgemeinert werden kann:

    $$[L^i, \Lambda](\alpha) = i(k-n+i-1)L^{i-1}(\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in \bigwedge^k V^*$$

26. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ wie in Aufgabe 25 und ω die assoziierte Fundamentalform. Die Hodge–Riemann–Paarung ist die Bilinearform

    $$\begin{aligned} Q : \bigwedge^k V^* \times \bigwedge^k V^* &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k} \end{aligned}$$

    wobei $\bigwedge^{2n} V^*$ mittels der Volumenform mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) (1 Punkt)

    $$Q\left(\bigwedge^{p,q} V^*, \bigwedge^{p',q'} V^*\right) = 0, \quad \text{für } (p,q) \neq (q', p')$$

(b) (3 Punkte)

$$i^{p-q}Q(\alpha,\bar{\alpha}) = (n-(p+q))!\,\langle\alpha,\alpha\rangle_{\mathbb{C}} > 0$$

für $0 \neq \alpha \in P^{p,q}$ mit $p+q \leq n$, wobei $P^{p,q} \subset \bigwedge^{p,q} V^*$ die primitiven Formen bezeichnet.

27. (a) (2 Punkte) Es sei $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ die Standardeinbettung $(z_0,\ldots,z_{n-1}) \mapsto (z_0,\ldots,z_{n-1},0)$. Betrachten Sie die induzierte Einbettung $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung der Fubini–Study Kählerform $\omega_{\mathrm{FS}}(\mathbb{P}^n)$ auf $\mathbb{P}^n$ die Fubini–Study Kählerform auf $\mathbb{P}^{n-1}$ liefert.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{P}^n} \omega_{\mathrm{FS}}^n = 1$.

28. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Riemannschen Flächen aus Aufgabe 11 Kählermannigfaltigkeiten sind.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die komplexen Tori aus Aufgabe 20 Kählermannigfaltigkeiten sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 11. 12. 2008 um 14:00 Uhr.