Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
MMath. Oliver Gray
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Komplexe Geometrie
WS 08/09

Übungsblatt 9

33. (4 Punkte) Beweisen Sie die Formel von Bott:

$$h^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{k+n-p}{k}\binom{k-1}{p} & q=0, 0 \le p \le n, k \ge p \\ 1 & q=p, 0 \le p \le n, k=0 \\ \binom{-k-p}{-k}\binom{-k-1}{n-p} & q=n, 0 \le p \le n, k < p-n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Benutzen Sie hierzu folgendes Resultat: $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0, q \ge 1$.

34. (4 Punkte) Es sei E ein Hermitesches holomorphes Vektorbündel auf einer kompakten Kählermannigfaltigkeit X. Zeigen Sie, dass jeder Schnitt $s \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^p \otimes E)$ harmonisch ist.

35. (a) (2 Punkte) Es seien ∇_i Zusammenhänge auf Vektorbündeln E_i, $i = 1, 2$. Ändern Sie beide Zusammenhänge mit einer 1–Form $a_i \in \mathcal{A}^1(X, \mathrm{End}E_i)$ ab und bestimmen Sie die neuen Zusammenhänge auf den assoziierten Bündeln $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$ und $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$.

    (b) (2 Punkte) Es sei ∇ ein Zusammenhang auf E. Beschreiben Sie die induzierten Zusammenhänge auf $\bigwedge^2 E$ und $\det E$.

36. (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass ein Zusammenhang ∇ auf einem Hermiteschen Bündel (E, h) genau dann Hermitesch ist, wenn $\nabla(h) = 0$, wobei ∇ auch den natürlichen induzierten Zusammenhang auf dem Bündel $(E \otimes \bar{E})^*$ bezeichnen soll.

    (b) (2 Punkte) Es seien M und N zwei Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und ∇ ein Hermitescher Zusammenhang auf einem Hermiteschen Vektorbündel (E, h) über N. Zeigen Sie, dass $f^*\nabla$ ein Hermitescher Zusammenhang bezüglich (f^*E, f^*h) ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 8. 1. 2009 um 14:00 Uhr.