Aufgabe 1

Aufgabenstellung. *Bestimme die Euler-Lagrang-Gleichungen für den eindimesionalen harmonischen Oszillator und das eindimensionale Pendel aus Beispiel 0.3 im Skript.*

Die Lagrange-Funktion

$$L : I \times R^{2n} \to R$$

ist im Beispiel 0.3:

- für den eindimesionalen harmonischen Oszillator (Teilaufgabe a):

$$\begin{aligned} L : I \times R^2 &\to R \\ (t, q, \dot{q}) &\mapsto \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2 \end{aligned}$$

- für das eindimensionale Pendel (Teilaufgabe b):

$$\begin{aligned} L : I \times R^2 &\to R \\ (t, q, \dot{q}) &\mapsto \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \cos(q) \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

sind damit hier:

- in (a): $m\ddot{q} = -\omega^2 q$
- in (b): $m\ddot{q} = -\sin(q)$

Die Legendre-Transformation

$$L : I \times R^{2n} \to I \times R^{2n}; \quad (t, q, \dot{q}) \mapsto \left(t, q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

ist hier:

- in (a): $: I \times R^{2n} \to I \times R^{2n}; \quad (t, q, \dot{q}) \to (t, q, m\dot{q})$
- in (b): $: I \times R^{2n} \to I \times R^{2n}; \quad (t, q, \dot{q}) \to (t, q, m\dot{q})$

Für die Hamiltonfunktion

$$H : I \times R^{2n} \to R; \quad (t, q, p) \mapsto p\, G(t, q, G(t, q, p)) - L(t, q, G(t, q, p))$$

erhält man hier mit $G(t, q, p) = \frac{p}{m}$ der Umkehrung der Legendre-Transformation:

- in (a): $H : I \times R^{2n} \to R; \quad (t,q,p) \mapsto p\ \frac{p}{m} - L(t,q,\frac{p}{m}) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2$
- in (b): $H : I \times R^{2n} \to R; \quad (t,q,p) \mapsto p\ \frac{p}{m} - L(t,q,\frac{p}{m}) = \frac{1}{2m}p^2 - \cos(q)$

Die Hamiltonschen Differentialgleichungen

$$\dot{q} = \partial_p H; \quad \dot{p} = -\partial_q H$$

sind damit hier:

- in (a): $\dot{q} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\omega^2 q$
- in (b): $\dot{q} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\sin(q)$

Aufgabe 2

Aufgabenstellung. *Bestimme Energieflächen bzw. Hamiltonsches Vektorfeld für den eindimesionalen harmonischen Oszillator und das eindimensionale Pendel aus Aufgabe 1 und stelle diese graphisch dar.*

Die Energieflächen $H = E$ sind im Beispiel 0.3

- in (a) gegeben durch die Gleichung $\frac{1}{2m}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = E$, also Ellipsen
- in (b) gegeben durch $\frac{1}{2m}p^2 - \cos(q) = E$.

Aufgabe 3

(a)

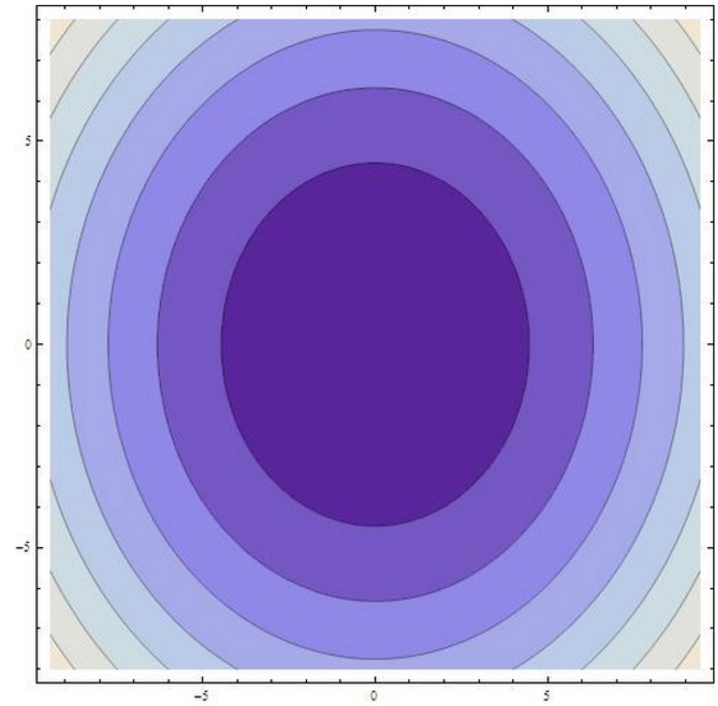
Aufgabenstellung. *Zeige:*

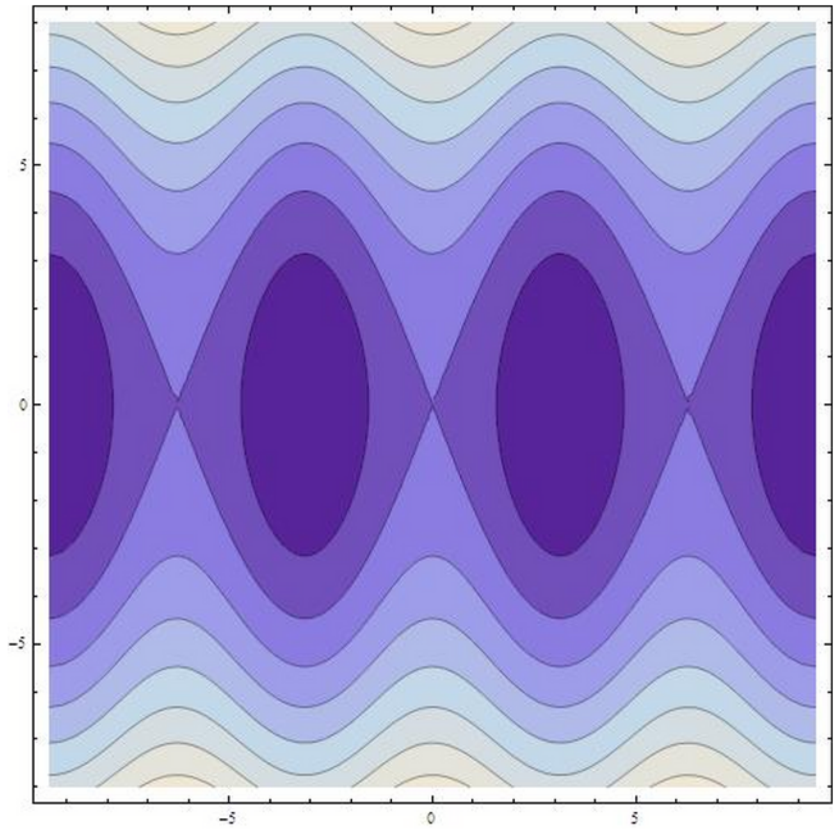
$$\{F,G\} = \omega(X_F, X_G)$$

Für die Poisson-Klammer von F und G gilt:

$$\begin{aligned}
\{F,G\} &\overset{\text{Def.}}{=} -\sum_{j,k=1}^{2n} (\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k G) \\
&= -\sum_{j,k,l,m=1}^{2n} (\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\omega_0)_{kl}(\omega_0^{-1})^{lm}(\partial_m G) \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^{2n} (X_F)^k(\omega_0)_{kl}(X_G)^l = \omega(X_F, X_G)
\end{aligned}$$

Bilder zu Aufgabe 2:





(b)

Aufgabenstellung. *$C^\infty(R^{2n})$ ist eine Lie-Algebra (d.h. ein Vektorraum mit einer antisymmetrischen Klammeroperation $\{\cdot,\cdot\}$, die die Jacobi-Identität erfüllt):*

$$\{\{F,G\},H\} = \{\{F,H\},G\} + \{F,\{G,H\}\}$$

Beweis:

- Vektorraum klar (punktweise Addition und Skalarenmultiplikation)
- Anti-Symmetrie: $\{G,F\} = \omega(X_F, X_G) = -\omega(X_G, X_F) = -\{F,G\}$
- Linearität: wegen Antisymmetrie reicht es, Linearität im ersten Argument zu zeigen: $\{F_1 + \lambda F_2, G\} = \omega(X_{F_1+\lambda F_2}, X_G) = \omega(X_{F_1} + \lambda X_{F_2}, X_G) = \omega(X_{F_1}, X_G) + \lambda\omega(X_{F_2}, X_G) = \{F_1, G\} + \lambda\{F_2, G\}$
- Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned}
&\{F,\{G;H\}\} + \{G,\{H;F\}\} + \{H,\{F;G\}\} \\
=&\{F, \sum_{j,k=1}^{2n} (\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k H)\} + \{G, \sum_{j,k=1}^{2n} (\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k F)\} + \{H, \sum_{j,k=1}^{2n} (\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k G)\} \\
=& \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} (\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l[(\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k H)] \\
&+ (\partial_i G)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l[(\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k F)] \\
&+ (\partial_i H)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l[(\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k G)] \\
=& \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} (\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k H) + (\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k H) \\
&+ (\partial_i G)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k F) + (\partial_i G)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k F) \\
&+ (\partial_i H)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k G) + (\partial_i H)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_j F)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k G) \\
=& \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} (\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k H) + (\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k H) \\
&- (\partial_j G)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_k\partial_l H)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_i F) + (\partial_i G)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k F) \\
&- (\partial_j H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_l\partial_k F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_i G) - (\partial_k H)(\omega_0^{-1})^{jk}(\partial_i F)(\omega_0^{-1})^{il}(\partial_l\partial_j G) \\
=&0
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aufgabenstellung. *Gegeben (V,ω) und $W \subset V$ koisotrop. Dann ist $\tilde{V} := W/W^\omega$ symplektisch mit der induzierten symplektischen Struktur $\tilde{\omega}$ von ω. (siehe Prop. 1.6) Zeige: Wenn $L \subset V$ ein Lagranger Unterraum ist, dann ist $\tilde{L} = (L \cap W + W^\omega)/W^\omega$ Lagrange in $\tilde{V}$.*

bekannt:

- W isotrop $\Leftrightarrow \tilde{\omega}|_W = 0 \Leftrightarrow W \subset W^\omega \Rightarrow \dim(W) \leq n$
- W koisotrop $\Leftrightarrow \tilde{\omega}|_{W^\omega} = 0 \Leftrightarrow W^\omega \subset W \Rightarrow \dim(W) \geq n$
- W langrange $\Leftrightarrow$ W isotrop und koisotrop $\Leftrightarrow \tilde{\omega}|_W = \tilde{\omega}|_{W^\omega} = 0 \Leftrightarrow W = W^\omega \Rightarrow \dim(W) = n$

Wir zeigen: $\tilde{L} = (L \cap W + W^\omega)/W^\omega$ ist isotrop und $\dim(\tilde{L}^\omega) = \dim(\tilde{L})$.

isotrop: Die Einschränkung von ω auf $\tilde{L}$ ist Null, da für $[v_1 = l_1 + w_1], [v_2 = l_2 + w_2] \in L \cap W + W^\omega$ beliebig mit $l_i \in L \cap W$ und $w_i \in W^\omega$ gilt:

$$\tilde{\omega}(v_1, v_2) = \tilde{\omega}(l_1 + w_1, l_2 + w_2) = \tilde{\omega}(l_1, l_2) + \tilde{\omega}(l_1, w_2) + \tilde{\omega}(w_1, l_2) + \tilde{\omega}(w_1, w_2) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\dim(L \cap W^\omega) &\overset{\dim(V)=\dim(W)+\dim(W^\omega)}{=} \dim(V) - \dim((L \cap W^\omega)^\omega) \\
&\overset{(W_1 \cap W_2)^\omega = W_1^\omega + W_2^\omega}{=} \dim(V) - \dim(L + W) \\
&= \dim(V) - \dim(L) - \dim(W) + \dim(L \cap W) \\
&\overset{\dim(V)=2\ \dim(L)}{=} \dim(L) - \dim(W) + \dim(L \cap W)
\end{aligned}$$

$\tilde{L}$ ist das Bild von $L \cap W$ unter der Abbildung $\pi : W \to W/W^\omega; \quad v \mapsto [v]$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\dim(\tilde{L}) &= \dim(\mathrm{im}(\pi|_{L \cap W})) \\
&= \dim(L \cap W) - \dim(\ker(\pi|_{L \cap W})) \\
&= \dim(L \cap W) - \dim(L \cap W^\omega) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \dim(W) - \dim(L)
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\dim(\tilde{V}) &\overset{\tilde{V}=W/W^\omega}{=} \dim(W) - \dim(W^\omega) \\
&\overset{\dim(W^\omega)=\dim(V)-\dim(W)}{=} 2\ \dim(W) - \dim(V) \\
&\overset{\dim(V)=2\ \dim(L)}{=} 2\ \dim(W) - 2\ \dim(L) \\
&= 2(\dim(W) - \dim(L)) = 2\ \dim(\tilde{L})
\end{aligned}$$

und damit $\dim(\tilde{L}^\omega) = \dim(\tilde{V}) - \dim(\tilde{L}) = 2\ \dim(\tilde{L}) - \dim(\tilde{L}) = \dim(\tilde{L})$.

Da also $\tilde{L}$ und $\tilde{L}^\omega$ die gleiche Dimension haben und $\tilde{L} \supset \tilde{L}^\omega$ ($\tilde{L}$ koisotrop, s.o.) gilt, muss $\tilde{L} = \tilde{L}^\omega$ gelten. $\square$

Aufgabe 5

Aufgabenstellung. *Gegeben sei (V, ω), $W \subset V$ koisotrop. Bestimme den Rang von $\omega|_W$.*

Es ist $\omega|_W : W \to W^*$, $v \mapsto \omega(v, \cdot)|_W$

Da W isotrop ist, gilt

$$\begin{aligned} W^\omega &= W \cap W^\omega = W \cap \{v \in V | \omega(v,w) = 0 \ \forall w \in W\} = \{v \in W | \omega(v,w) = 0 \ \forall w \in W\} \\ &= \ker(\omega|_W) \end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(\omega|_W) &= \dim(\operatorname{bild}(\omega|_W)) = \dim(W) - \dim(\ker(\omega|_W)) \overset{W^\omega \subset \ker(\omega|_W)}{=} \dim(W) - \dim(W^\omega) \\ &\overset{\dim(W^\omega) = \dim(V) - \dim(W)}{=} 2\dim(W) - \dim(V) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Aufgabenstellung. *Gegeben ein reeller Vektorraum V und eine antisymmetrische Bilinearform β. Zeige, dass eine Basis*

$$(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k)$$

existiert (für geeignete n, k), so dass

$$\beta(a_i, b_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots n$$

und β verschwindet sonst.

Betrachte $\ker(\beta) = \{u \in V : \beta(u, v) = 0 \ \forall v \in V\} =: U$.
Schreibe V als $V = U \oplus W$. $\beta|_W$ ist dann offensichtlich nicht entartet, also eine symplektische Form.
Wähle also eine symplektische Basis $\{a_i, b_i | i = 1, \dots, n\}$ von W (wie in Satz 1.7) und eine beliebige Basis $\{c_i | i = 1, \dots, k\}$ von U. Diese Vereinigung der beiden Basen ist dann eine Basis von V und erfüllt offensichtlich die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 7

Aufgabenstellung. *Gegeben (V, ω) und $W \subset V$ isotrop, koisotrop, Lagrange oder symplektisch. Zeige, dass eine Standardbasis auf W (siehe Übungsaufgabe 6) immer zu einer Standardbasis auf W erweitert werden kann.*

- Sei U symplektisch mit Basis $\{a_i, b_i | i = 1, \dots, k\}$. Offensichtlich ist U der Unterraum W_k aus Beweis 1.7. Fahre also fort wie in Beweis 1.7.

- Sei U isotrop mit Basis $\{a_i | i = 1, \dots, k\}$. Ergänze nun den ersten Basisvektor a_1 von U mit einem Vektor $b_1 \notin U$, so dass $\omega(a_1, b_1) = 1$ (existiert, da ω auf V nicht entartet ist) und $\omega(a_i, b_1) = 0$ für alle $i \neq 1$. So ein Vektor b_1 existiert, da sich die Bedingung $\omega(a_i, b_1) = \delta_{i1}$ so schreiben lässt

$$\begin{pmatrix} a_1^T \omega \\ a_2^T \omega \\ \vdots \\ a_k^T \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_1)_1 \\ (b_1)_2 \\ \vdots \\ (b_1)_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  wobei die $a_i^T \omega$ (wegen der Unabhängigkeit der a_i und der nicht-Entartetheit von ω) linear unabhängig sind und die daraus zusammengesetzte Matrix somit vollen Rang hat (surjektiv) und somit das System von k Gleichungen mit $2n$ Unbekannten lösbar ist.
  Die anderen Basisvektoren a_i von U liegen offensichtlich in $\text{span}(\{a_1, b_1\})^\omega$. Wähle also als a_2 (s. Beweis 1.7) den zweiten Basisvektor von U. Weiter wie in Beweis 1.7.

- Sei U Lagrange. Da U damit auch isotrop ist, gehe vor wie oben.

- Sei U koisotrop mit Basis $\{a_i, b_j | i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l, k \geq l\}$ so dass $\omega(a_i, b_j) = \delta_{ij}\ \forall i = 1, \dots k; j = 1, \dots, l$. Falls $l = k$, ist U symplektisch $\Rightarrow$ gehe vor wie oben. Falls $l < k$ Wähle einen Vektor b_{l+1} sodass $\omega(a_i, b_{l+1}) = \delta_{i,l+1}\ \forall i = 1, \dots, k$. Iterieren.

Aufgabe 8

Aufgabenstellung. *Zeige, dass ein* kodim $= 1$*-Unterraum immer koisotrop ist.*

Sei also $U \subset V$ mit $\dim(U) = 2n - 1$ wobei $2n = \dim(V)$. Dann ist: $\omega|_{U^\omega} = 0$.
Beweis: Es ist $\dim(U^\omega) = \dim(V) - \dim(U) = 2n - (2n - 1) = 1$. Damit lässt sich U^ω so schreiben: $U^\omega = \{\lambda v | \lambda \in R\}$ mit v einem Basisvektor von U^ω. Damit gilt für beliebige Elemente $\lambda_1 v, \lambda_2 v \in U^\omega$:

$$\omega(\lambda_1 v, \lambda_2 v) = \lambda_1 \lambda_2 \omega(v, v) = \omega(\lambda_2 v, \lambda_1 v) = -\omega(\lambda_1 v, \lambda_2 v)$$
$$\Rightarrow \omega(\lambda_1 v, \lambda_2 v) = 0$$

Aufgabe 9

Aufgabenstellung. *Finde einen Unterraum W von (R^{2n}, ω_0), der weder isotrop, koisotrop, Lagrange noch symplektisch ist. In wechen Dimensionen ist dies möglich?*

Sei $n = 3$. Wähle Koordinaten $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)^T \in R^6$ bzgl. der Basis $\{a_1 :=$

$e_1; a_2 := e_2; a_3 := e_3; b_1 := e_4; b_2 := e_5; b_3 := e_6\}$, bezüglich derer

$$\omega = \begin{pmatrix} & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \end{pmatrix}$$

betrachte $U = \operatorname{span}(\{a_1, a_2, b_2\})$. Damit ist $U^\omega = \operatorname{span}(\{a_1 a_3, b_3\})$. Dann ist U

- nicht isotrop, denn $\omega(a_2, b_2) = 1$,
- nicht koisotrop, denn $\omega(a_3, b_3) = 1$,
- nicht Lagrange, da weder isotrop noch koisotrop,
- nicht symplektisch, da $U \cap U^\omega = \operatorname{span}\{a_1\} \neq \{\}$.

So eine Konstruktion geht nur für $n \geq 3$.

- Für $n = 0$ ist der Unterraum U auch nulldimensional und somit isotrop
- Für $n = 1$ ist der Unterraum U entweder
  - nulldimensional und somit isotrop,
  - eindimensional und damit koisotrop (siehe Aufgabe 8) oder
  - zweidiminsesional. Dann ist U der Gesamtraum und damit symplektisch.
- Für $n = 2$ ist der Unterraum U entweder
  - nulldimensional und somit isotrop,
  - eindimensional und damit isotrop (siehe Aufgabe 8),
  - zweidiminsesional. Dann existieren entweder zwei Vektoren $v, w \in U$ mit $\omega(v, w) = 1$ und somit ist U symplektisch oder nicht, dann ist U Lagrange.
  - dreidimensional und damit koisotrop (siehe Aufgabe 8) oder
  - vierdimensional und somit der Gesamtraum und symplektisch.
- Für $n \geq 3$ wähle wie oben $U = \operatorname{span}(\{a_1, a_2, b_2\})$. Damit ist $U^\omega = \operatorname{span}(\{a_1 a_3, b_3, a_i, b_i \text{ mit } i = 4, \ldots, n\})$. Dann ist U weder isotrop noch koisotrop noch Lagrange noch symplektisch mit der gleichen Begründung wie oben.

Aufgabe 10

Aufgabenstellung. *Gegeben sei eine antisymmetrische Matrix,* $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$. *Die Pfaffsche Determinante* $\operatorname{Pf}(\omega)$ *von* ω *ist definiert als:*

$$\operatorname{vol}_\omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} =: \operatorname{Pf}(\omega)\ v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{2n}^*$$

Zeige, dass

$$\mathrm{Pf}(\omega)^2 = \det(\omega)$$

Hinweis: $\exists \Psi \in \mathrm{Gl}(2n, R) : \omega = \Psi^T \omega \Psi$.

Sei (V, ω) ein Symplektischer Vektorraum.
Sei $B = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$ eine Basis von V und $B^* = \{v_1^*, \dots, v_{2n}^*\}$ die duale Basis von V^*.
$\Phi : V^* \to V; \quad v_i^* \mapsto v_i$ ist dann ein Isomorphismus zwischen V und V^*.
Definiere die Determinante von ω in der gegebenen Basis B folgendermaßen:

$$\det(\omega) := \det(\Phi \circ \omega)$$

Zu zeigen: Für eine beliebige, fest gewählte, Basis B gilt:

$$\det(\omega) = \mathrm{Pf}(\omega)^2$$

Behauptung: Beide seiten sind gleich dem Quadrat der Determinante der Abbildung $A : V^* \to V^*$, die die Basis B^* auf die (eine) symplektische Basis B_0^* abbildet: $v_i^* \mapsto w_i^*$
Beweis: $\det(A)$ erfüllt die definierende Gleichung für $\mathrm{Pf}(\omega)$, denn

$$\mathrm{vol}_\omega = \det(A)\ v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{2n}^*$$

ist wegen der Darstellung von vol_ω in der Symplektischen Basis $B_0^* = \{w_i^* | i = 1, \dots, 2n\}$ $\mathrm{vol}_\omega = w_1^* \wedge \ldots \wedge w_{2n}^*$ äquivalent zu

$$v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{2n}^* = \det(A^{-1}) w_1^* \wedge \ldots \wedge w_{2n}^*$$

wobei ($A^{-1} : w_i^* \to v_i^*$ und) beide Seiten dieser Gleichung multilinear in den v^* sind und für $v_i^* = w_i^*$ übereinstimmen, also gleich sind.

Für die Determnante von ω gilt:

$$\begin{aligned}
\det(\omega) &= \det(\Phi \circ \omega) \\
&= \det((w_i \mapsto v_i) \circ \Phi_0 \circ A \circ \omega) \\
&= \det(\Phi_0 \circ A \circ \omega \circ (v_i \mapsto w_i)) \\
&= \det(\Phi_0 \circ \omega \circ A^T \circ (v_i \mapsto w_i)) \\
&= \det(\Phi_0 \circ \omega) \det(A^T \circ (w_i \mapsto v_i))
\end{aligned}$$

wobei $A^T : V \to V$ durch folgende Gleichung definiert ist: $\omega \circ A^T : A \circ \omega$ und die Determinante von ω in der symplektischen Basis 1 ist und $\det(A^T) = ... = \det(A)$.

Aufgabe 11

Aufgabenstellung. *Gegeben (V,ω) und eine komplexe Struktur J auf V. Zeige:*
J ist kompatibel mit $\omega \Leftrightarrow$

- *$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)\ \forall u, v \in V$, d.h. J ist ein Symplektomorphismus*
- *$\omega(u, Ju) > 0\ \forall u \in V$, J ist (ω-)zahm*

J ist kompatibel mit ω bedeutet, dass $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega(\,\cdot\,;J\,\cdot\,)$ ein positiv und symmetrisch ist.

Aufgrund der Definition von g ist die postiv-Definitheit von g hierbei äquivalent zur ω-Zahmheit von J:

$$g(u,u) \geq 0\ \forall u \in V \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega(u, Ju) \geq 0\ \forall u \in V$$

und die Symmetrie von g ist äquivalent dazu, dass J ein Symplektomorphismus ist, denn falls g symmetrisch folgt

$$\omega(Ju, Jv) = g(Ju, v) = g(v, Ju) = \omega(v, J^2u) = \omega(v, -u) = -\omega(v, u) = \omega(u, v)$$

und umgekehrt für J Symplektomorphismus

$$g(u, v) = \omega(u, Jv) = -\omega(Jv, u) = \omega(Jv, -u) = \omega(Jv, J^2u) = \omega(v, Ju) = g(v, u)\ .$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 12

Aufgabenstellung. *Gegeben sei ein kompatibles Tripel (ω, J, g) auf V. Zeige: $\forall u, v \in V$:*

- *$\omega(u, v) = g_J(Ju, v)$,*
- *$g_J(Ju, Jv) = g_J(u, v)$,*
- *$|\omega(u, v)|^2 \leq |u|^2|v|^2$ wobei $|u|^2 = g_J(u, u)$.*

Es gilt:

- $\omega(u, v) = -\omega(v, u) = -\omega(v, -J^2u) = \omega(v, J^2u) = g_J(v, Ju) = g_J(Ju, v)$
- $g_J(Ju, Jv) = \omega(Ju, J^2v) = \omega(Ju, -v) = -\omega(Ju, v) = \omega(v, Ju) = g_J(v, u) = g_J(u, v)$
- $|\omega(u, v)| = |g_J(Ju, v)| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |Ju| \cdot |v| = |v| \cdot |u|$,
  da $|Ju| = \sqrt{g_J(Ju, Ju)} = \sqrt{g_J(u, u)} = |u|$

Aufgabe 13

Aufgabenstellung. *(ω, J, g) sei ein kompatibles Tripel auf V. $(v_1, \ldots, v_{2n})$ sei eine Basis von V, so dass*

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$$

und $\mathrm{Pf}(\omega) > 0$. *Zeige, dass*

$$\mathrm{vol}_\omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} =: \sqrt{\det(g_J)}\ v_1^* \wedge \ldots \wedge v_{2n}^* .$$

Sei $B = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ eine Basis von V und $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_{2n}^*\}$ die duale Basis von V^*. $\Phi : V^* \to V;\quad v_i^* \mapsto v_i$ ist dann ein Isomorphismus zwischen V und V^*.

Definiere $\det(\omega) := \det(\Phi \circ \omega)$ und $\det(g) := \det(\Phi \circ g)$ die Determinanten von ω und g in der gegebenen Basis.

Nach Voraussetzung ist $g : V \to V^*;\quad v_i \mapsto g(v, \cdot)$ und $\omega : V \to V^*;\quad v_i \mapsto \omega(v, \cdot) = g(Jv, \cdot)$ und somit $\omega = g \circ J$. Damit gilt:

$$\det(\omega) := \det(\Phi \circ \omega) = \det(\Phi \circ g \circ J) = \det(\Phi \circ g) \cdot \det(J) = \det(\Phi \circ g) =: \det(g)$$

Daraus folgt mit Aufgabe 10 direkt die Behauptung.

Aufgabe 14

Aufgabenstellung.

- *Gegeben sei das kompatibles Tripel $(R^{2n}, \omega_0, J_0, g_0 = \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Zeige, dass das orthogonale Komplement (bzgl. g_0) eines Lagrangen Unterraumes Λ gegeben ist durch $\Lambda^\perp = J_0\Lambda$.*
- *Sei $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine Orthonormalbasis von Λ. Zeige, dass $(a_i, J_0 a_i)_{i=1,\ldots,n}$ eine symplektische Standardbasis bilden.*

Es gilt $\Lambda^\perp = J_0\Lambda$. Beweis:
" $\supset$ ": Sei $u \in J_0\Lambda$, also $J_0^{-1}u \in \Lambda$ beliebig. Dann ist $\forall v \in \Lambda : g_0(u, v) = \omega_0(u, J_0 v) = \omega_0(J_0^{-1}u, v) = 0$ (da Λ Langrange) und somit $u \in \Lambda^\perp$.

" $\supset$ " : Sei $u \in \Lambda^\perp$ beliebig. Dann ist $\forall v \in \Lambda : 0 = g(u, v) = \omega_0(u, J_0 v) = \omega_0(J_0^{-1}u, v)$ und somit $J_0^{-1}u \in \Lambda^\omega = \Lambda$ und somit $u \in L_0\Lambda$.

Außerdem ist $J_0\Lambda$ Lagrange, denn

- $J_0\Lambda$ ist isotrop: $\forall L_0 u, L_0 v \in L_0\Lambda$ (also $\forall u, v \in \Lambda$) gilt $\omega(L_0 u, L_0 v) = \omega(u, v) = 0$ da Λ istrop ist, also $J_0\Lambda \subset (J_0\Lambda)^\omega$ und
- $\dim(J_0\Lambda) = \dim((J_0\Lambda)^\omega)$, denn

– $\dim(J_0\Lambda) = \dim(\Lambda) = \frac{1}{2}\dim(V)$
– $\dim((J_0\Lambda)^\omega) = \dim(V) - \dim(J_0\Lambda) = \dim(V) - \frac{1}{2}\dim(V) = \frac{1}{2}\dim(V)$

und somit $J_0\Lambda = (J_0\Lambda)^\omega$.

Für $\{a_i | i = 1, \dots, n\}$ eine Orthonormalbasis von Λ bildet $\{a_i, b_i | i = 1, \dots, n\}$ eine symplektische Basis von V, denn

- $\omega(a_i, a_j) = 0$, da Λ Lagrange ist,
- $\omega(b_i, b_j) = \omega(J_0 a_i, L_0 a_j) = \omega(a_i, a_j) = 0$, da Λ Lagrange ist und
- $\omega(a_i, b_j) = \omega(a_i, J_0 a_j) = g_J(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ da $\{a_i | i = 1, \dots, n\}$ nach Voraussetzung orthonormal.

Aufgabe 15

Aufgabenstellung. *Zeige, dass*

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \frac{1}{|z|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}^i z^j}{|z|^2} \right) \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j$$

eine symplektische Struktur auf CP^n ist. Bestimme ω_{FS} in lokalen Karten $U_\alpha = \{z_\alpha = 0\}$ für $\alpha = 0, \dots, n$.

Betrachte den komplexen projektiven Raum

$$CP^n = (C^{n+1} - \{0\})/C^*$$

und die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : (C^{n+1} - \{0\}) &\to CP^n \\ (z^0, \dots, z^n) &\mapsto [z^0, \dots, z^n] \end{aligned}$$

mit Ableitung

$$\begin{aligned} \pi_*|_z : T_z^C C^{n+1} = C \times T_z^R C^{n+1} &\to T_{[z]}^C(CP^n) = C \times T_{[z]}^R(CP^n) \\ v &\mapsto [[v]] \end{aligned}$$

der C-linearen Fortsetzung von

$$\pi_*^R|_z : T_z^R C^{n+1} \to T_{[z]}^R(CP^n) \ ,$$

der üblichen Ableitung von π in einem beliebigen Punkt $z \in C^{n+1} \cong R^{2(n+1)}$. (Bemerkung: $T_{[z]}^R(CP^n)$ hat reelle Dimension $2n$ - wie CP^n, $T_{[z]}^C(CP^n)$ hat damit komplexe Dimension $2n$ bzw. reelle Dimension $4n$.) Wir definieren eine 2-Form auf CP^n, indem wir zuerst eine 2-Form auf C^{n+1} definieren. Statt sie in der Basis $\{\mathrm{d}x^i, \mathrm{d}y^i | i = 1, \dots, n\}$

(gemeint ist natürlich die C-lineare Fortsetzung) darzustellen, verwenden wir eine alternative Basis: $\{\mathrm{d}z^i, \mathrm{d}\overline{z}^i | i = 1, \ldots, n\}$, wobei $\mathrm{d}z^i := \mathrm{d}x^i + i\mathrm{d}y^i$ und $\mathrm{d}\overline{z}^i := \mathrm{d}x^i - i\mathrm{d}y^i$. (Das ist die duale Basis zu $\{\partial_{x^i}, \partial_{y^i} | i = 1, \ldots, n\}$ mit $\partial_{z_i} := \frac{1}{2}(\partial_{x_i} - i\partial_{y_i}), \overline{\partial}_{z_i} := \frac{1}{2}(\partial_{x_i} + i\partial_{y_i})$.) In dieser Basis sei:

$$\omega_0(z) := \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \frac{1}{|z|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}^i z^j}{|z|^2} \right) \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j$$

Daraus konstruieren wir eine 2-Form auf CP^n folgendermaßen: für beliebige $[[u]], [[v]] \in T^C_{[z]}(CP^n)$ sei

$$\omega_{\mathrm{FS}}([z])([[u]], [[v]]) := \omega_0(z)(u, v)$$

wobei $\pi(z) = [z]$ und $\pi_*|_z u = [[u]]$, $\pi_*|_z v = [[v]]$.

Wohldefiniertheit

Da die Wahl der Urbildpunkte z bzw. u und v nicht eindeutig ist, ist noch Wohldefiniertheit zu zeigen: Falls

- $[z_1] = [z_2]$, also $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ bzw. $z_2 = \lambda z_1$ für ein $\lambda \in C^*$ und
- $u_1, v_1 \in T^C_{z_1} C^{n+1}$ und $u_2, v_2 \in T^C_{z_2} C^{n+1}$ mit $[[u_1]] = [[u_2]]$ und $[[v_1]] = [[v_2]]$

muss auch $\omega_0(z_1)(u_1, v_1) = \omega_0(z_2)(u_2, v_2)$ gelten. Zu zeigen ist also die Implikation

$$\pi_*|_z u_1 = \pi_*|_{\lambda z} u_2; \quad \text{und} \quad \pi_*|_z v_1 = \pi_*|_{\lambda z} v_2 \tag{0.1}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0|_z(u_1, v_1) = \omega_0|_{\lambda z}(u_2, v_2)\ . \tag{0.2}$$

Da mit $(:\lambda)$ der Multiplikation mit der komplexen Zahl λ^{-1} gilt, dass $\pi = \pi \circ (:\lambda)$, ist die erste Aussage ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \pi_*|_z u_1 &= (\pi \circ (:\lambda))_*|_{\lambda z} u_2 = \pi_*|_z (:\lambda)_*|_{\lambda z} u_2 \quad \text{und} \\ \pi_*|_z v_1 &= (\pi \circ (:\lambda))_*|_{\lambda z} v_2 = \pi_*|_z (:\lambda)_*|_{\lambda z} v_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} u &:= u_1 - (:\lambda)_*|_{\lambda z} u_2 \in \ker(\pi_*|_z) \quad \text{und} \\ v &:= v_1 - (:\lambda)_*|_{\lambda z} v_2 \in \ker(\pi_*|_z) \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} (:\lambda)^* \omega_0 &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \frac{1}{|z \circ (:\lambda)|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{(\overline{z^i \circ (:\lambda)})(z^j \circ (:\lambda))}{|z^i \circ (:\lambda)|^2} \right) ((:\lambda)^* \mathrm{d}z^i) \wedge ((:\lambda)^* \mathrm{d}\overline{z}^j) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \frac{1}{|\lambda z|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{(\overline{\lambda z^i})(\lambda z^j)}{|\lambda z^i|^2} \right) (\lambda \mathrm{d}z^i) \wedge (\overline{\lambda} \mathrm{d}\overline{z}^j) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{n} \frac{1}{|z|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z^i} z^j}{|z^i|^2} \right) \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j \\ &= \omega_0 \end{aligned}$$

(als $(:\lambda)$ ist ein Symplektomorphismus von (C^{n+1},ω_0)), ist zweite Aussage ist äquivalent zu

$$\omega_0|_z(u_1,v_1) = ((:\lambda)^*\omega_0)|_{\lambda z}(u_2,v_2) = \omega_0|_z((:\lambda)_*|_{\lambda z}u_2,(:\lambda)_*|_{\lambda z}v_2)$$

bzw.

$$u \in \ker(\omega_0|_z) \quad \text{und}$$
$$v \in \ker(\omega_0|_z)$$

mit u und v definiert wie oben und $\omega_0|_z : T_z^C C^{n+1} \to (T_z^C)^* C^{n+1}$. Also ist für Wohldefiniertheit zu zeigen:

$$\boxed{\ker(\pi_*|_z) \subset \ker(\omega_0|_z)} \tag{0.3}$$

$\ker(\pi_*|_z)$ besteht also aus allen $v \in T_z^C C^{n+1}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\pi_* v = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall\phi : 0 = (\pi_* v)\phi$$
$$\Leftrightarrow \forall\phi : 0 = v(\phi\circ\pi)$$

Also muss $\forall\phi$ die Kombination $\phi\circ\pi$ in Richtung v konstant sein, also auch π. Also muss der Kern von $\pi_*^R|_z$ der (kompexifizierte) Tangentialraum in z an $[z] \subset C^{n+1}$ sein. Da $[z] \cong C^*$ über R zweidimensional ist, ist auch $T_z^R[z]$ über R zweidimensional und damit $T_z^C[z] = C \times T_z^R[z]$ zweidimensional über C. Also spannen zwei (über C) linear unabhängige Tangentialvektoren $T_z^C[z]$ auf. Betrachte zum Beispiel die Tangentialvektoren an die in $[z]$ verlaufenden Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$:

$$\gamma^1(t) = (t+1)z$$
$$\gamma^2(t) = (it+i)z$$

damit erhalten wir allgemein:

$$\begin{aligned}
\gamma_*\partial_t &= \sum_i \partial_t(x^i\circ\gamma)\partial_{x^i} + \partial_t(y^i\circ\gamma)\partial_{y^i} \\
&= \sum_i \partial_t((x^i+iy^i)\circ\gamma)\frac{1}{2}(\partial_{x^i} - i\partial_{y^i}) + \partial_t((x^i-iy^i)\circ\gamma)\frac{1}{2}(\partial_{x^i} + i\partial_{y^i}) \\
&= \sum_i \partial_t(z^i\circ\gamma)\partial_{z^i} + \partial_t(\overline{z}^i\circ\gamma)\overline{\partial}_{z^i} \\
&= \sum_i \partial_t(z^i\circ\gamma)\partial_i + \partial_t(\overline{z^i\circ\gamma})\overline{\partial}_i
\end{aligned}$$

also hier

$$w_1 := \gamma_*^1|_0\partial_t = \sum_i \partial_t((t+1)z^i)|_0\partial_i + \partial_t(\overline{(t+1)z^i})|_0\overline{\partial}_i = \sum_i z^i\partial_i + \overline{z}^i\overline{\partial}_i$$

und

$$w_2 := \gamma_*^2|_0\partial_t = \sum_i \partial_t((it+1)z^i)|_0\partial_i + \partial_t(\overline{(it+1)z^i})|_0\overline{\partial}_i = \sum_i iz^i\partial_i - i\overline{z}^i\overline{\partial}_i$$

Über C kann man auch alternativ diese Basis wählen:

$$w_3 := \frac{1}{2}(w_1 - iw_2) = \sum_i z^i\partial_i$$
$$w_4 := \frac{1}{2}(w_1 + iw_2) = \sum_i \overline{z}^i\overline{\partial}_i$$

Allerdings entsprichen diese keinen Tangentialvektoren an eine Kurve in $C^{n+1} \cong R^{2n+2}$. Damit ist also:

$$\begin{aligned}\mathrm{kern}(\pi_*|_{z_1}) &= \mathrm{span}_C\left\{\sum_{i=0}^n z^i\partial_i + \overline{z}^i\overline{\partial}_i, \sum_{i=0}^n iz^i\partial_i - i\overline{z}^i\overline{\partial}_i\right\} \\ &= \mathrm{span}_C\left\{\sum_{i=0}^n z^i\partial_i, \sum_{i=0}^n \overline{z}^i\overline{\partial}_i\right\}\ .\end{aligned}$$

Betrachte nun den Kern von $\omega|_z$. Ein beliebiger Vektor $v \in T_z^C[z]$ läßt sich schreiben als $v = \sum_{i=1}^{n+1} v^i\partial_i + v^{\overline{i}}\overline{\partial}_i$. Der Schnitt mit diesem Unterraum besteht aus allen solchen Vektoren mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned}0 = \omega(v,\cdot) =& \frac{i}{2}\sum_{i,j=0}^n \frac{1}{|z|^2}\left(\delta_{ij}v^i - \frac{v^i\overline{z}^i z^j}{|z|^2}\right)\mathrm{d}\overline{z}^j - \left(\delta_{ij}v^{\overline{j}} - \frac{v^{\overline{j}}\overline{z}^i z^j}{|z|^2}\right)\mathrm{d}z^i \\ \Leftrightarrow \forall j: & \sum_{i=0}^n \delta_{ij}v^i = \sum_{i=0}^n \frac{v^i\overline{z}^i z^j}{|z|^2} \quad \text{und} \quad \forall i: \sum_{j=0}^n \delta_{ij}v^{\overline{j}} = \sum_{j=0}^n \frac{v^{\overline{j}}\overline{z}^i z^j}{|z|^2} \\ \Leftrightarrow \forall j: & v^j = \left(\sum_{i=0}^n \frac{v^i\overline{z}^i}{|z|^2}\right) z^j \quad \text{und} \quad \forall i: v^{\overline{i}} = \left(\sum_{j=0}^n \frac{v^{\overline{i}}z^j}{|z|^2}\right)\overline{z}^i\end{aligned}$$

Also ist $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Vielfaches von $(z_1, \ldots, z_n)$ und $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ ein Vielfaches von $(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$. Damit ist der Kern von $\omega|_z$ gleich dem komplexen Spann von $\sum_{i=1}^{n+1} z^i\partial_i$ und $\sum_{i=1}^{n+1} \overline{z}^i\overline{\partial}_i$. Also gilt sogar

$$\ker(\pi_*|_z) = \mathrm{span}_C\left\{\sum_{i=0}^n z^i\partial_i, \sum_i \overline{z}^i\overline{\partial}_i\right\} = \ker((\omega_0)_*|_z) \tag{0.4}$$

Bemerkung: $\sum_{i=0}^n z^i\partial_i$ heißt Euler-Feld.

Da ω_{FS} also wohldefiniert ist, lässt sich die definierende Eigenschaft von ω_{FS},

$$\omega_{\mathrm{FS}}(\pi(z))(\pi_*|_z u, \pi_*|_z v) = \omega_0(z)(u,v)$$

als $\omega_0 = \pi^*\omega_{\mathrm{FS}}$ verstehen.

Bilinearität und Antisymmetrie

Bilinearität und Antisymmetrie von ω_{FS} in jedem Punkt $[z] \in CP^n$ sind klar, da ω_0 bilinear und antisymmetrisch ist und wenn $v_1, \ldots, v_n$ im Urbild von $[[v_1]], \ldots, [[v_n]]$ unter $\pi_*|_z$ sind, liegt sicher $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ im Urbild von $\sum_{i=1}^n a_i[[v_i]]$ (Linearität von $\pi_*|_z$) und somit

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{FS}}([z])\left(\sum_{i=1}^n a_i[[u_i]], \sum_{j=1}^n b_j[[v_j]]\right) &= \omega_0(z)\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j\ \omega_0(z)(u_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j\ \omega_{\mathrm{FS}}([z])([[u_i]], [[v_j]])\ .\end{aligned}$$

Außerdem ist $\omega_{\mathrm{FS}}([z])([[v]], [[u]]) = \omega_0(z)(v, u) = -\omega_0(z)(u, v) = -\omega_{\mathrm{FS}}([z])([[u]], [[v]])$.

Geschlossenheit

Geschlossenheit: Es ist $\mathrm{d}\omega_0 = 0$, denn

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_0(z) =&\mathrm{d}\left(\frac{i}{2}\sum_{i,j=0}^n \frac{1}{|z|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}_i z_j}{|z|^2}\right)\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\right)\\ =&\frac{i}{2}\sum_{i,j=0}^n \mathrm{d}\left(\frac{1}{|z|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}_i z_j}{|z|^2}\right)\mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\right)\\ =&\frac{i}{2}\sum_{i,j,k=0}^n \partial_k\left(\frac{1}{|z|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}_i z_j}{|z|^2}\right)\right)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\\ &+ \frac{i}{2}\sum_{i,j,k=0}^n \overline{\partial}_k\left(\frac{1}{|z|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\overline{z}_i z_j}{|z|^2}\right)\right)\mathrm{d}\overline{z}^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\\ =&\frac{i}{2}\sum_{i,j,k=0}^n \left(-\frac{\delta_{ij}\overline{z}_k}{|z|^4} - \frac{\delta_{jk}\overline{z}_i}{|z|^4} + \frac{2\overline{z}_i z_j \overline{z}_k}{|z|^6}\right)\mathrm{d}z^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\\ &+ \left(-\frac{\delta_{ij} z_k}{|z|^4} - \frac{\delta_{ik} z_j}{|z|^4} + \frac{2\overline{z}_i z_j z_k}{|z|^4}\right)\mathrm{d}\overline{z}^k \wedge \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^j\\ =&0\end{aligned}$$

Da die linken Terme symmetrisch unter Vertauschung von i und k (oben) bzw. j und k (unten) sind und die rechten Terme antisymmetrisch.
Damit folgt $0 = \mathrm{d}\omega_0 = \mathrm{d}\pi^*\omega_{\mathrm{FS}} = \pi^*\mathrm{d}\omega_{\mathrm{FS}}$. Da π und $\pi_*|_z$ für alle $z \in C^{n+1}$ surjektiv sind, ist der Pull-Back π^* injektiv und es folgt $0 = \mathrm{d}\omega_{\mathrm{FS}}$.

Beweis für π^* injektiv: Sei $\alpha \in T^*(CP^n)$

$$\begin{aligned}
&0 = \pi^*\alpha \\
&\Leftrightarrow (\pi^*\alpha)(v) = 0 \quad \forall v \in T(CP^n) \\
&\Leftrightarrow \alpha(\pi_* v) = 0 \quad \forall v \in T(CP^n) \\
&\Leftrightarrow \alpha(w) = 0, \quad \forall w \in TC^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 0
\end{aligned}$$

Nicht-Entartetheit

Nicht-Entartetheit ist klar, denn:

$$\begin{aligned}
&0 = \omega_{\mathrm{FS}}([[v]],[[w]]) \quad \forall [[w]] \in T_{[z]}CP^n \\
\Rightarrow &0 = \omega_0(v,w) \quad \forall w \in T_z C^{n+1} \\
\Rightarrow &0 = \omega_0(v) \in T^* C^{n+1} \\
\Rightarrow &v \in \ker((\omega_0)_*|_z) \\
\Rightarrow &v \in \ker(\pi_*|_z) \\
\Rightarrow &[[v]] = 0
\end{aligned}$$

In Karten

Für eine Standard-Karte (U_i, ϕ_i) mit

$$\begin{aligned}
U_i &= \{[z] \in CP^n | x_i \neq 0\} \\
\phi_i &: U_i \to C^n \\
[z_0, \dots, z_n] &\mapsto \frac{1}{z_i}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_n)\}
\end{aligned}$$

gilt: Die Einschränkung der Projektion π auf die Ebene $E_i := \{z \in C^{n+1} | z_i = 1\}$ ist invertierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_i \circ \pi|_{E_i} &: E_i \to C^n \\
(z_0, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots z_n) &\mapsto (z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_n)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
(\phi_i \circ \pi|_{E_i})^{-1} = \pi|_{E_i}^{-1} \circ \phi_i^{-1} &: C^n \to E_i \\
(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots z_n) &\mapsto (z_0, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots z_n)
\end{aligned}$$

also:

$$
\begin{aligned}
(\phi_i^{-1})^*\omega &= (\pi|_{E_i} \circ \pi|_{E_i}^{-1} \circ \phi_i^{-1})^*\omega = (\pi|_{E_i}^{-1} \circ \phi_i^{-1})^*(\pi|_{E_i})^*\omega_{\mathrm{FS}} = (\pi|_{E_i}^{-1} \circ \phi_i^{-1})^*\omega_0|_{E_i} \\
&= (\pi|_{E_i}^{-1} \circ \phi_i^{-1})^* \left(\frac{i}{2} \sum_{i,j=0;j,k\neq i}^{n} \frac{1}{1+|z|^2} \left(\delta_{jk} - \frac{\overline{z}_j z_k}{1+|z|^2} \right) \mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^k \right) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{1+|z|^2} \left(\delta_{jk} - \frac{\overline{z}_j z_k}{1+|z|^2} \right) \mathrm{d}z^j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^k
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16

Aufgabenstellung. *Zeige, dass $[X,Y]$ tatsächlich eine Ableitung auf $F(M)$ ist, d.h. $[X,Y] : F(M) \to F(M)$ ist linear und erfüllt die Leibnitzregel.*

z.B. in Koordinaten: Sei $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^j \partial_j$. Dann ist für eine beliebige skalare Funktion ϕ:

$$
\begin{aligned}
[X,Y](\phi) &= XY\phi - YX\phi = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \partial_i (Y^j \partial_j \phi) - Y^j \partial_j (X^i \partial_i \phi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X^i (\partial_i Y^j)(\partial_j \phi) + X^i Y^j (\partial_i \partial_j \phi) - Y^j (\partial_j X^i)(\partial_i \phi) - Y^j X^i (\partial_j \partial_i \phi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X^i (\partial_i Y^j)(\partial_j \phi) - Y^j (\partial_j X^i)(\partial_i \phi) = \sum_{i,j=1}^{n} X^j (\partial_j Y^i)(\partial_i \phi) - Y^j (\partial_j X^i)(\partial_i \phi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (X^j (\partial_j Y^i) - Y^j (\partial_j X^i)) \right) \partial_i \phi
\end{aligned}
$$

also ist $[X,Y]$ offensichtlich ein Vektorfeld mit Koeffizienten

$$
[X,Y]^i = \sum_{j=1}^{n} (X^j (\partial_j Y^i) - Y^j (\partial_j X^i))
$$

Daraus folgen alle behaupteten Eigenschaften.

oder ohne Karten: $[X,Y]$ ist linear, denn für beliebige $\lambda \in R$ und beliebige skalare Funktionen f ung g gilt

$$
\begin{aligned}
[X,Y](\lambda f) =& XY(\lambda f) - YX(\lambda f) = ((X\lambda Y f) - (Y \lambda X f)) \\
=& \lambda XYf - \lambda YXf = \lambda((XYf) - (YXf)) = \lambda([X,Y]f) \quad \text{und} \\
[X,Y](f+g) =& XY(f+g) - YX(f+g) = X(Yf + Yg) - Y(Xf + Xg) \\
=& XYf + XYg - YXf - YXg = (XY - YX)f + (XY - YX)g \\
=& [X,Y]f + [X,Y]g
\end{aligned}
$$

und erfüllt die Leibnitz-Regel, denn

$$\begin{aligned}[X,Y](fg) =& XY(fg) - YX(fg) = X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ =&(XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg) \\ &- (YXf)g - (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg) - f(YXg) \\ =&(XYf)g + f(XYg) - (YXf)g - f(YXg) \\ =&((XY - YX)f)g + (f(XY - YX))g \\ =&([X,Y]f)g + f([X,Y]g)\end{aligned}$$

Aufgabe 17

Aufgabenstellung. *Zeige, dass* $(\xi(M), [\cdot,\cdot])$ *eine Lie-Algebra ist, im Speziellen die Jacobi-Identität erfüllt:*

$$[X,[Y,Z]] + \textit{zyklisch vertauscht} = 0$$

$(\chi, [\cdot,\cdot])$ ist eine Lie-Algebra, denn die Lie-Klammer ist bilinear: für Vektorfelder X, X_1, X_2, Y_1, Y_2 und $\lambda \in R$ gilt

$$\begin{aligned}[X,\lambda Y] =& X(\lambda Y) - (\lambda Y)X \\ =&\lambda XY - \lambda YX \\ =&\lambda(XY - YX) = \lambda[X,Y] \\ [X_1 + X_2, Y] =& (X_1 + X_2)Y - Y(X_1 + X_2) \\ =&X_1Y + X_2Y - YX_1 - YX_2 \\ =&(X_1Y - YX_1) + (X_2Y - YX_2) \\ =&[X_1,Y] + [X_2,Y]\ ,\end{aligned}$$

offensichtlich antisymmeterisch und erfüllt die Jacobi-Identität, denn

$$\begin{aligned}&([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]) \\ =&X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) \\ &- (ZX - XZ)Y + Z(XY - YX) - (XY - YX)Z \\ =&XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ \\ &- ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ = 0\end{aligned}$$

Damit ist $D_X := [X,\cdot]$ eine Ableitung auf $\chi(M)$, denn sie erfüllt bzgl. der Lie-Klammer die Leibnitz-Regel (=Produkt-Regel):

$$\begin{aligned}D_X[Y,Z] =&[X,[Y,Z]] \overset{\text{Jacobi-Id}}{=} -[Y,[Z,X]] - [Z,[X,Y]] \\ =&[[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] = [(D_XY),Z] + [Y,(D_XZ)]\end{aligned}$$

Aufgabe 18

Aufgabenstellung. *Zeige, dass* $\sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s$ *ist.*

Sei

$$\begin{aligned} \sigma : R \times M &\to M \\ (t,p) &\mapsto \sigma_t(p) \end{aligned}$$

der zum Vektorfeld X gehörige Fluss, also $\sigma_* \partial_t = X$. Für festes $p \in M$ und $s \in R$ sind

$$\begin{aligned} c_1 :& R \to M; \quad t \mapsto \sigma_{t+s}(p) \text{und} \\ c_2 :& R \to M; \quad t \mapsto \sigma_t(\sigma_s(p)) \end{aligned}$$

zwei durch t parametrisierte Kurven. Für $t = 0$ gilt

$$c_1(t) = c_1(0) = \sigma_s(p) = \sigma_0(\sigma_s(p)) = \sigma_t(\sigma_s(p)) = c_2(t)$$

Außerdem ist die Ableitung beider Kurven bei $t = 0$ gleich:

$$(c_1)_* \partial_t|_0 = X_{c_1(0)} = X_{\sigma_s(p)} = X_{c_2(0)} = (c_2)_* \partial_t|_0$$

Damit sind mit der Theorie für Gewöhnliche Differentialgleichungen (arbeite lokal in Koordinaten) beide Kurven gleich.

Aufgabe 19

Aufgabenstellung. *Zeige:*

- *Leibnitz:* $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge L_X\eta$
- $(L_X\omega)(Y_1, \dots, Y_k) = L_X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y_1, \dots, L_X Y_i, \dots, Y_k)$
- $\partial_t \sigma_t^* \omega = L_X \sigma_t^* \omega = \sigma_t^*(L_X\omega)$
- *Cartan-Formel:* $L_X\omega = (\mathrm{d}\iota_X + \iota_X \mathrm{d})\omega$
- $\iota_X L_X = L_X \iota_X$, $\mathrm{d}L_X = L_X \mathrm{d}$

Es gilt:

- für $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\omega)(Y_1, \dots, Y_{k+1}) := &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} Y_i \omega(Y_1, \dots, \hat{Y_i}, \dots, Y_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y_i}, \dots, \hat{Y_j}, \dots, Y_{k+1}) \end{aligned}$$

- für $\iota_X : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$

$$(\iota_X \omega)(Y_1, \ldots, Y_k) := \omega(X, Y_1, \ldots, Y_k)$$

Für die Lie-Ableitung gilt

- für skalare Funktionen ϕ

$$\begin{aligned} L_X \phi &= \partial_t(\phi \circ \sigma_t)|_{t=0} \\ &= \partial_t(\phi \circ \sigma_t) \circ (\sigma_t^{-1})|_{t=0} \\ &= (\sigma_* \partial_t)|_{t=0} \phi = X\phi \end{aligned}$$

- für Vektorfelder Y

$$\begin{aligned} L_X(Y\phi) &= \partial_t((Y\phi) \circ \sigma_t)|_{t=0} \\ &\overset{(*)}{=} \partial_t[((\sigma_{-t})_* Y)(\phi \circ \sigma_t)]|_{t=0} \\ &= (\partial_t((\sigma_{-t})_* Y))|_{t=0} (\phi \circ \sigma_t)|_{t=0} + ((\sigma_{-t})_* Y)|_{t=0} (\partial_t(\phi \circ \sigma_t))|_{t=0} \\ &= (L_X Y)\phi + Y(L_X \phi) \end{aligned}$$

da

$$((\sigma_{-t})_* Y)(\phi \circ \sigma_t) = Y(\phi \circ \sigma_t \circ \sigma_{-t}) \circ \sigma_t = Y(\phi) \circ \sigma_t \quad (*)$$

und damit

$$(L_X Y)\phi = L_X(Y\phi) - Y(L_X \phi) = XY\phi - YX\phi = [X, Y]\phi$$

- für Differentialformen ω

$$\begin{aligned} L_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) =& \partial_t((\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) \circ \sigma_t)|_{t=0}) \\ \overset{(**)}{=}& \partial_t((\sigma_t^* \omega)((\sigma_{-t})_* Y_1, \ldots, (\sigma_{-t})_* Y_k))|_{t=0}) \\ =& \partial_t(\sigma_t^* \omega)|_{t=0}(((\sigma_{-t})_* Y_1)|_{t=0}, \ldots, (\sigma_{-t})_* Y_k)|_{t=0} \\ &+ \sum_{i=1}^{k} (\sigma_t^* \omega)|_{t=0}(((\sigma_{-t})_* Y_1)|_{t=0}, \ldots, \partial_t((\sigma_{-t})_* Y_i)|_{t=0}, \ldots, ((\sigma_{-t})_* Y_k)|_{t=0}) \\ =& (L_X \omega)(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, L_X Y_i, \ldots, Y_k) \quad \to \text{ Punkt 2 unten} \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} &[(f^* \omega)(Y)|_p := \omega(f_* Y)_{f(p)}] \\ &(\sigma_t^* \omega)((\sigma_{-t})_* Y_1, \ldots, (\sigma_{-t})_* Y_k) \circ \sigma_t = \omega((\sigma_t)_* (\sigma_{-t})_* Y_1, \ldots, (\sigma_t)_* (\sigma_{-t})_* Y_k) \circ \sigma_t \\ =& \omega((\sigma_t \circ \sigma_{-t})_* Y_1, \ldots, (\sigma_t \circ \sigma_{-t})_* Y_k) \circ \sigma_t = \omega(Y_1, \ldots, Y_k) \circ \sigma_t \quad (**) \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(L_X\omega)(Y_1,\dots,Y_k) &= L_X(\omega(Y_1,\dots,Y_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(Y_1,\dots,L_XY_i,\dots,Y_k)\\
&= X(\omega(Y_1,\dots,Y_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(Y_1,\dots,[X,Y_i],\dots,Y_k)
\end{aligned}
$$

Also gilt:

- $$
\begin{aligned}
L_X(\omega\wedge\eta) &= \partial_t(\sigma_t^*(\omega\wedge\eta))|_{t=0}\\
&= \partial_t((\sigma_t^*\omega)\wedge(\sigma_t^*\eta))|_{t=0}\\
&= (\partial_t(\sigma_t^*\omega))|_{t=0}\wedge(\sigma_t^*\eta)|_{t=0} + (\sigma_t^*\omega)|_{t=0}\wedge(\partial_t(\sigma_t^*\eta))|_{t=0}\\
&= (L_X\omega)\wedge\eta + \omega\wedge(L_X\eta)
\end{aligned}
$$

- siehe oben
$$
(L_X\omega)(Y_1,\dots,Y_k) = \ldots = L_X(\omega(Y_1,\dots,Y_k)) - \sum_{i=1}^{k}\omega(Y_1,\dots,L_XY_i,\dots,Y_k)
$$

- –
$$
\begin{aligned}
L_X(\sigma_t^*\omega) &= \partial_s(\sigma_s^*\sigma_t^*\omega)|_{s=0} = \partial_s((\sigma_s\circ\sigma_t)^*\omega)|_{s=0}\\
=&\partial_s(\sigma_{s+t}^*\omega)|_{s=0} = \partial_t(\sigma_{s+t}^*\omega)|_{s=0} = \partial_t(\sigma_t^*\omega)
\end{aligned}
$$

  –
$$
\begin{aligned}
\sigma_t^*(L_X\omega) &= \sigma_t^*\partial_s(\sigma_s^*\omega)|_{s=0} = \partial_s(\sigma_t^*\sigma_s^*\omega)|_{s=0}\\
=&\partial_s((\sigma_t\circ\sigma_s)^*\omega)|_{s=0} = \partial_s(\sigma_{s+t}^*\omega)|_{s=0} = \partial_t(\sigma_{s+t}^*\omega)|_{s=0} = \partial_t(\sigma_t^*\omega)
\end{aligned}
$$

- –
$$
\begin{aligned}
&(\iota_X(\mathrm{d}\omega))(Y_1,\dots,Y_k) = (\mathrm{d}\omega)(X,Y_1,\dots,Y_k)\\
=&X\omega(Y_1,\dots,Y_k) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^iY_i\omega(X,Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_k)\\
&+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\omega([X,Y_i],Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_k)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j],X,Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,\hat{Y}_j,\dots,Y_k)
\end{aligned}
$$

–

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}(\iota_X\omega))(Y_1,\dots,Y_k)\\
=&\sum_{i=1}^{k}(\iota_X\omega)(-1)^{i+1}Y_i\omega(Y_1,\dots,\hat{Y_i},\dots,Y_k)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\iota_X\omega)([Y_i,Y_j],Y_1,\dots,\hat{Y_i},\dots,\hat{Y_j},\dots,Y_k)\\
=&\sum_{i=1}^{k}\omega(-1)^{i+1}Y_i\omega(X,Y_1,\dots,\hat{Y_i},\dots,Y_k)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(X,[Y_i,Y_j],Y_1,\dots,\hat{Y_i},\dots,\hat{Y_j},\dots,Y_k)
\end{aligned}$$

– und damit ist die Summe der beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&(\iota_X(\mathrm{d}\omega))(Y_1,\dots,Y_k)+(\mathrm{d}(\iota_X\omega))(Y_1,\dots,Y_k)\\
=&X\omega(Y_1,\dots,Y_k)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\omega([X,Y_i],Y_1,\dots,\hat{Y_i},\dots,Y_k)\\
=&X\omega(Y_1,\dots,Y_k)-\sum_{i=1}^{k}\omega(Y_1,\dots,[X,Y_i],\dots,Y_k)\\
=&(L_X\omega)(Y_1,\dots,Y_k)\quad\text{nach Punkt 2}
\end{aligned}$$

- –

$$\begin{aligned}
\iota_X L_X &= \iota_X(\mathrm{d}\iota_X+\iota_X\mathrm{d})=\iota_X\mathrm{d}\iota_X+\iota_X\iota_X\mathrm{d}=\iota_X\mathrm{d}\iota_X\\
&=\iota_X\mathrm{d}\iota_X+\mathrm{d}\iota_X\iota_X=(\iota_X\mathrm{d}+\mathrm{d}\iota_X)\iota_X=L_X\iota_X
\end{aligned}$$

–

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L_X &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\iota_X+\iota_X\mathrm{d})=\mathrm{d}\mathrm{d}\iota_X+\mathrm{d}\iota_X\mathrm{d}=\mathrm{d}\iota_X\mathrm{d}\\
&=\iota_X\mathrm{d}\mathrm{d}+\mathrm{d}\iota_X\mathrm{d}\iota_X=(\iota_X\mathrm{d}+\mathrm{d}\iota_X)\mathrm{d}=L_X\mathrm{d}
\end{aligned}$$

Aufgabe 20

Aufgabenstellung. *Zeige, dass die Poisson-Klammer die Jacobi-Identität erfüllt:*

$$\{f,\{g;h\}\}+\textit{zyklisch vertauscht}=0$$

$\Rightarrow F(M)$ *ist eine Lie-Algebra.*

Bekannt ist:

1. $\{f;g\}=-X_f g=-\omega(X_f,X_g)$

2. $X^{\phi}\chi = -\omega(X^{\chi}, X^{\phi}) = \omega(X^{\phi}, X^{\chi}) = -X^{\chi}\phi$

3. $$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)(X_1, X_2, X_3) &= X_1\omega(X_2, X_3) + X_2\omega(X_3, X_1) + X_3\omega(X_1, X_2)\\ &- \omega([X_1; X_2], X_3) - \omega([X_3; X_1], X_2) - \omega([X_2, X_3], X_1)\end{aligned}$$

   wobei

4. $\mathrm{d}\omega$ hier Null ist.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\{f, \{g; h\}\} + \{g, \{h; f\}\} + \{h, \{f; g\}\}\\
&\overset{1}{=} -X_f\omega(X_g; X_h) - X_g\omega(X_h; X_f) - X_h\omega(X_f; X_g)\\
&\overset{3,4}{=} -\omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_h, X_f], X_g) - \omega([X_g, X_h], X_f)\\
&\overset{1}{=} [X_f, X_g]h + [X_h, X_f]g + [X_g, X_h]f\\
&= X_f X_g h - X_g X_f h + X_h X_f g - X_f X_h g + X_g X_h f - X_h X_g f\\
&\overset{2}{=} X^f X^g h + X^g X^h f + X^h X^f g + X^f X^g h + X^g X^h f + X^h X^f g\\
&= 2(X^f X^g h + X^g X^h f + X^h X^f g)\\
&\overset{1}{=} -2(X^f\{g, h\} - X^g\{h, f\} - X^h\{f, g\})\\
&\overset{2}{=} 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{\{h, f\}\} + \{h\{\{f, g\}\})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h\{f, g\}\} = 0$$

Aufgabe 21

Aufgabenstellung. *(zu Lagrangen Untermannigfaltigkeiten)*

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow (T^*M, \omega_{can})\\ (Y, \alpha) &\longrightarrow \textit{ Lagrange Untermannigfaltigkeiten, z.B. } N^*Y \textit{ wenn } \alpha = 0\end{aligned}$$

Betrachte $M = S^1$, $T^*S \cong S_1 \times R$ und $M = T^2$.

$T^*(S^1)$

Wir parametrisieren S^1 mit der Koordinate ϕ und den Tangentialraum in jedem Punkt mit der Koordinate s (z.B. der Länge bzgl. irgendeiner Norm). Die tautologische 1-Form β sieht dann so aus

$$\beta = s\mathrm{d}\phi$$

die kanonische symplektische ω Form ist

$$\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\phi$$

Nullschnitt von $T^*(S^1)$

Die tautologische 1-Form ist auf dem Nullschnitt L_1 von $T^*(S^1)$ gleich Null, da die Koordinate s Null ist. Das Tangentialbündel an L_1 ist in jedem Punkt von L_1 der Spann von ∂_ϕ. L_1 ist isotrop, da es Dimension eins hat und koisotrop, da es Kodimension eins hat (siehe Aufgabe 8). (Da der Tangentialraum damit auch eindimensional ist, setzt man in ω immer zwei linear abhängige Vektoren ein.) Also ist L_1 Lagrange.

$T_p^*(S^1)$

Die tautologische 1-Form ist auf L_2, dem Kotangentialraum in einem Punkt von S^1 ist Null, da der Tangentialraum an einen Punkt von $T^*p(S^1)$ von ∂_s aufgespannt wird und β ein Vielfaches von $\mathrm{d}\phi$ ist. Mit der gleichen Begründung wie oben (eindimensional) ist L_2 Lagrange.

Geschlossene 1-Form auf S^1

Der Graph L_3 jeder 1-Form auf S^1 ist eindimensional, also Lagrange. Dass passt zur Behauptung, dass der Graph einer 1-Form genau dann Lagrange ist, wenn die Form geschlossen ist, denn jede 1-Form auf S^1 ist geschlossen: Für jede 1-Form $\alpha = f\mathrm{d}\phi$ ist

$$\mathrm{d}\alpha = \partial_\phi f \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\phi = 0$$

$T^*(T^2)$

Es ist $T^2 = S^1 \times S^1$. Also wählen wir die Parametrisierung s_1, s_2, ϕ_1, ϕ_2 Dann ist die tautologische 1-Form β

$$\beta = s_1 \mathrm{d}\phi_1 + s_2 \mathrm{d}\phi_2$$

die kanonische symplektische ω Form ist

$$\omega = \mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}\phi_1 + \mathrm{d}s_2 \wedge \mathrm{d}\phi_2$$

Nullschnitt von $T^*(T^2)$

Die tautologische 1-Form ist auf dem Nullschnitt L_1 von $T^*(T^2)$ gleich Null, da die Koordinaten s und s_2 Null sind. Das Tangentialbündel an L_1 ist in jedem Punkt von L_1 der Spann von ∂_{ϕ_1} und ∂_{ϕ_2}, genauso wie das ω-orthogonale davon. Da ω keine Komponente $\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2$ hat, ist ihre Einschränkung auf diese beiden Bündel gleich Null. Damit ist L_1 Lagrange.

$T_p(T^2)$

Die tautologische 1-Form ist auf dem Kotangentialraum L_2 in einem Punkt von $T^*(T^2)$ gleich Null, da die Koordinaten s und s_2 Null sind. Das Tangentialbündel an L_2 ist in jedem Punkt von L_2 der Spann von ∂_{s_1} und ∂_{s_2}, genauso wie das ω-orthogonale davon.

Da ω keine Komponente $\mathrm{d}s_1 \wedge \mathrm{d}s_2$ hat, ist ihre Einschränkung auf diese beiden Bündel gleich Null. Damit ist L_2 Lagrange.
Geschlossene 1-Form auf T^2
Der Graph einer geschlossene 1-Form α auf T^2 L_3 ist eine Lagrange Untermannigfaltigkeit von T^2 genau dann wenn α geschlossen ist. Das bedeutet in unseren Koordinaten für $\alpha = f_1 \mathrm{d}\phi_1 + f_2 \mathrm{d}\phi_2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha =& \mathrm{d}(f_1 \mathrm{d}\phi_1 + f_2 \mathrm{d}\phi_2) = (\mathrm{d}f_1) \wedge \mathrm{d}\phi_1 + (\mathrm{d}f_2) \wedge \mathrm{d}\phi_2 \\ =& (\partial_{\phi_1} f_1)\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_1 + (\partial_{\phi_2} f_1)\mathrm{d}\phi_2 \wedge \mathrm{d}\phi_1 + (\partial_{\phi_1} f_2)\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2 + (\partial_{\phi_2} f_2)\mathrm{d}\phi_2 \wedge \mathrm{d}\phi_2 \\ =& (\partial_{\phi_1} f_2 - \partial_{\phi_2} f_1)\mathrm{d}\phi_1 \wedge \mathrm{d}\phi_2\end{aligned}$$

Aufgabe 22

Aufgabenstellung. *Bestimme die Geodätengleichung durch Variation (vgl. Kapitel 0.1) von $L(\gamma)$: (Euler-Lagrange-Gleichung)*

$$0 = \gamma''^i + \sum_{j,k=1}^{n} \gamma'^j \gamma'^k \Gamma_{ij}^k$$

Vorüberlegung: Definiere eine (kovariante) Ableitung (oder "Zusammenhang") für Vektorfelder, ähnlich wie die Lie-Ableitung

$$\begin{aligned}\nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

die

- linear im ersten Argument ist:

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1+X_2} Y &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_1} Y \text{ und} \\ \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y\end{aligned}$$

- und bezüglich der zweiten Komponente wie eine Ableitung wirkt (also die Leibnitz-Regel erfüllt):

$$\begin{aligned}\nabla_X (Y_1 + Y_2) &= \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \text{ und} \\ \nabla_X (fY) &= f(\nabla_X Y) + (Xf)Y \ .\end{aligned}$$

Fordert man zusätzlich

- Torsionsfreiheit:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

- und Verträglichkeit mit der Metrik g:

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Bemerkung: Diese Eigenschaft kann man bei der Verallgemeinerung auf skalare Funktionen:

$$\nabla_X f := Xf$$

und auf Differentialformen:

$$(\nabla_X \omega)(Y_1, \ldots, Y_k) := \nabla_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{i=1}^{k} (\nabla_X \omega)(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_k)$$

wie bei der Lie-Ableitung schreiben als:

$$\nabla_X g = 0 \ .$$

dann ist dadurch der Zusammenhang ∇ eindeutig bestimmt. Er heißt Levi-Civita-Zusammenhang. Die skalaren Funktionen Γ_{ij}^k, die den Zusammenhang in einer lokalen Karte beschreiben:

$$\nabla_i \partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

heißen Christoffel-Symbole. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Zusammenhang so schreiben: Für $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ und $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j$ ist

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \partial_i} \left(\sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j \right) = \sum_{i=1}^{n} X^i \nabla_i \left(\sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X^i \nabla_i (Y^j \partial_j) = \sum_{i,j=1}^{n} X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j (\nabla_i \partial_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + \sum_{i,j,k=1}^{n} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k
\end{aligned}$$

Eine Kurve heißt Geodäte, wenn die kovariante Ableitung ihres Tangentialvektors in Richtung eben dieses Tangentialvektors verschwindet:

$$\nabla_t \partial_t = 0$$

Die Bedingung "Geodäte" für eine Kurve γ läßt sich in einer lokalen Karte so schreiben: $\partial_t := \gamma_* \partial_t = \sum_{i=1}^n (\partial_t (x^i \circ \gamma)) \partial_i = \sum_{i=1}^n (\partial_t \gamma^i) \partial_i$ und damit

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_t \partial_t = \nabla_t \sum_{i=1}^{n} (\partial_t \gamma^i) \partial_i = \sum_{i=1}^{n} (\partial_t \partial_t \gamma^i) \partial_i + \sum_{j=1}^{n} (\partial_t \gamma^j)(\nabla_t \partial_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\partial_t^2 \gamma^i) \partial_i + \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_t \gamma^j)(\partial_t \gamma^k)(\nabla_k \partial_j) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_t^2 \gamma^i) \partial_i + \sum_{i,j,k=1}^{n} (\partial_t \gamma^j)(\partial_t \gamma^k) \Gamma_{jk}^i \partial_i
\end{aligned}$$

Also muss für jedes i gelten:

$$0 = \partial_t^2 \gamma^i + \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_t \gamma^j)(\partial_t \gamma^k)\Gamma_{jk}^i$$

Das ist offensichtlich eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Behauptung: Eine Kurve kürzesten Abstands muss eine Geodäte im obigen Sinn sein. Beweis:
Betrachte eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$. Eine Variation von γ ist eine differenzierbare Abbildung $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ für ein $\epsilon > 0$ mit $\alpha(0,t) = \gamma(t)\ \forall t \in [a,b]$. α ist eine Variation mit festen Endpunkten, wenn zusätzlich gilt: $\alpha(s,0) = \gamma(0)$ und $\alpha(s,1) = \gamma(1)\ \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Für konstantes s erhält man eine Kurve $\alpha(s,\cdot) : [a,b] \to M$, $t \mapsto \alpha(s,t)$, deren Länge von s abhängt.
Für eine Variation gilt folgendes, wobei ∂_t und ∂_s hier jeweils der Push-Forward der partiellen Ableitungen unter α: $\partial_t := \alpha_* \partial_t$ bzw. $\partial_s := \alpha_* \partial_s|_{s=0}$ sind und oBdA γ nach Bogenlänge parametrisiert, also für $s = 0$: $|\partial_t| =$const.)

$$\begin{aligned}
\partial_s L(\alpha(s,\cdot)) =& \partial_s \int_a^b |\partial_t| \mathrm{d}t = \int_a^b \partial_s |\partial_t| \mathrm{d}t = \int_a^b \partial_s \langle \partial_t, \partial_t \rangle^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_a^b (\partial_s \langle \partial_t, \partial_t \rangle) \langle \partial_t, \partial_t \rangle^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \langle \nabla_s \partial_t, \partial_t \rangle \mathrm{d}t = \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \langle \nabla_t \partial_s, \partial_t \rangle \mathrm{d}t = \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b (\partial_t \langle \partial_s, \partial_t \rangle - \langle \partial_s, \nabla_t \partial_t \rangle) \,\mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{|\partial_t|} \langle \partial_s, \partial_t \rangle |_{t=a} - \frac{1}{|\partial_t|} \langle \partial_s, \partial_t \rangle |_{t=b} - \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \langle \partial_s, \nabla_t \partial_t \rangle \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(Ableitung und Integration dürfen vertauscht werden, wenn der abgeleitete Integrand stetig ist. Außerdem kommutieren ∂_s und ∂_t und deswegen vertauschen gilt wegen Torsionsfreiheit von ∇: $\nabla_s \partial_t = \nabla_t \partial_s$.)
Für jede Variation mit festen Endpunkten ist $\partial_s|_{t=a} = 0 = \partial_s|_{t=b}$ und damit:

$$\partial_s L(\alpha(s,\cdot)) = -\frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \langle \partial_s, \nabla_t \partial_t \rangle \mathrm{d}t$$

Für eine Kurve minimaler Länge muss diese Größe bei $s = 0$ verschwinden. Das gilt für beliebige Variationsvektorfelder ∂_s nur wenn $\forall t \in [a,b]$: $\nabla_t \partial_t = 0$. Für $s = 0$ ist ∂_t jedoch nach Konstruktion der Tangentailvektor an die Kurve γ. Also muss eine kürzeste Kurve eine Geodäte sein und somit obige Gleichung erfüllen.

Wir wollen nun in in einer Karte die Minimalitätsbedingung in Abhängigkeit von der Metrik darstellen und durch Vergleich mit obiger Geodätengleichung eine Darstellung der Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k mithilfe der Komponenten der Metrik $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$ herleiten. Wir schreiben $\partial_t \gamma_i = \gamma'$ etc. Betrachte also wie oben eine beliebige Variation mit festen Randpunkten α eines minimalen Weges an der Stelle $s = 0$. Eine Variation mit festen

Randpunkten $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to R^n$ kann man so schreiben: $\alpha(s,t) = \gamma(t) + s\vartheta(t)$ mit einer beliebigen Kurve ϑ mit $\vartheta(a) = \vartheta(b) = 0$. Damit ist:

$$\begin{aligned}
0 =& \partial_s L(\alpha(s,\cdot)) = \int_a^b \partial_s \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij} (\partial_t(\gamma + s\vartheta)^i)(\partial_t(\gamma + s\vartheta)^j) \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2} \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^n \gamma'^i \gamma'^j \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_s \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij} (\gamma'^i\gamma'^j + s\vartheta'^i\gamma'^j + s\gamma'^i\vartheta'^j + s^2\vartheta'^i\vartheta'^j) \right) \right) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2|\partial_t|} \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left(g_{ij}\vartheta'^i\gamma'^j + g_{ij}\vartheta'^j\gamma'^i + \sum_{k=1}^n \vartheta^k (\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j \right) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2|\partial_t|} \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \partial_t(g_{ij}\gamma'^i\vartheta^j) - g_{ij}\gamma''^i\vartheta^j + \partial_t(g_{ij}\gamma'^j\vartheta^i) - g_{ij}\gamma''^j\vartheta^i \\
&+ \sum_{i,j,k=1}^n \vartheta^k(\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j - \gamma'^k(\partial_k g_{ij})\gamma'^i\vartheta^j - \gamma'^k(\partial_k g_{ij})\gamma'^j\vartheta^i \ \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2|\partial_t|} \int_a^b \sum_{k=1}^n \vartheta^k \left(-2\sum_{i=1}^n g_{ik}\gamma''^i + \sum_{i,j=1}^n (\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j - \gamma'^j(\partial_j g_{ik})\gamma'^i - \gamma'^i(\partial_i g_{jk})\gamma'^j \right) \vartheta t
\end{aligned}$$

Damit das für beliebige ϑ^k gilt, muss also für alle k:

$$\begin{aligned}
0 =& -2\sum_{i=1}^n g_{ik}\gamma''^i + \sum_{i,j=1}^n (\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j - \gamma'^j(\partial_j g_{ik})\gamma'^i - \gamma'^i(\partial_i g_{jk})\gamma'^j \\
0 =& \sum_{i,k=1}^n g^{kl} g_{ik}\gamma''^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n g^{kl} \left(-(\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j + \gamma'^j(\partial_j g_{ik})\gamma'^i + \gamma'^i(\partial_i g_{jk})\gamma'^j \right) \\
0 =& \gamma''^l + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n g^{kl} \left(\gamma'^j(\partial_j g_{ik})\gamma'^i + \gamma'^i(\partial_i g_{jk})\gamma'^j - (\partial_k g_{ij})\gamma'^i\gamma'^j \right) \\
0 =& \gamma''^i + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^n g^{il} \left(\gamma'^j(\partial_j g_{kl})\gamma'^k + \gamma'^k(\partial_k g_{jl})\gamma'^j - (\partial_l g_{jk})\gamma'^k\gamma'^j \right) \\
0 =& \partial_t^2\gamma^i + \sum_{j,k=1}^n \gamma'^j\gamma'^k \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left((\partial_j g_{kl}) + (\partial_k g_{jl}) - (\partial_l g_{jk}) \right) \right)
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Geodätengleichung

$$0 = \gamma''^i + \sum_{j,k=1}^n \gamma'^j\gamma'^k \Gamma_{ij}^k$$

liefert:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$$

Beispiel: Bertrachten wir den R^n mit der Identität als Karte und der Standard-Metrik $g_0(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$. Mit unserer Formel für die Christoffel-Symbole erhält man hier:

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \; \forall i, j, k = 1, \ldots, n$$

Hätten wir die Formel für die Christoffel-Symbole nicht allgemein hergeleitet, hätten wir obige Minimierung auch speziell für diesen Fall durchrechnen können:

$$\begin{aligned}
0 =& \partial_s L(\alpha(s,\cdot)) = \int_a^b \partial_s \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_t(\gamma + s\vartheta)^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \int_a^b \partial_s \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_t(\gamma^j + s\vartheta^j))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
=& \int_a^b \partial_s \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma'^i + s\vartheta'^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma'^i)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\partial_s \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma'^i + s\vartheta'^j)^2 \right) \right) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{2} \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_s (\gamma'^i + s\vartheta'^j)^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma'^i \vartheta'^j + s(\vartheta'^j)^2 \right) \mathrm{d}t \\
=& \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma'^i (\vartheta'^i) \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{|\partial_t|} \left[\sum_{i=1}^{n} \gamma'^i \vartheta^j \right]_a^b - \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma''^i \vartheta^j \right) \mathrm{d}t \\
=& - \frac{1}{|\partial_t|} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma''^i \vartheta^j \right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Damit dies für beliebige ϑ^i gilt, muss $\forall i : \gamma''^i = 0$ sein. Ein Vergleich mit der allgemeinen Geodätengleichung zeigt, dass hier die Christoffel-Symbole verschwinden.

Also müssen die Komponenten des Tangentialvektors an die Kurve γ'^i konstant sein. Die Lösungen der Geodätengleichung sind also offensichtlich (wie erwartet) Geraden.

Aufgabe 23

Aufgabenstellung. $X_1 = R^m = X^2$ *und die erzeugende Funktion sei*

$$S(x, y) = -\frac{1}{2}|x - y|^2$$

Bestimme den zugehörigen Symplektomorphismus.

Bekannt: Eine Funktion $\psi : M_1 \to M_2$ ist genau dann ein Symplektomorphismus, wenn ihr Graph $\{(x, \psi(x))|x \in M_1\}$ eine Lagrange Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ bezüglich der symplektischen Struktur $\tilde{\omega} = \mathrm{pr}_1^*\omega_1 - \mathrm{pr}_2^*\omega_2$ ist.
Also ist insbesondere eine Funktion $\phi : M_1 = T^*X_1 \to M_2 = T^*X_2$ genau dann ein Symplektomorphismus, wenn ihr Graph $\tilde{Y} = \{(x, \phi(x))|x \in T^*X_1\}$ eine Lagrange Untermannigfaltigkeit von $T^*X_1 \times T^*X_2 = T^*(X_1 \times X_2)$ ist. Z.B. ist das Differential $\mathrm{d}_X S - \mathrm{d}_Y S \in \Omega^1(X_1 \times X_2)$ einer Funktion $S : M_1 \times M_2$ eine geschlossene 1-Form auf $X_1 \times X_2$ geschlossen, und somit ihr Bild $\tilde{Y}_S$ eine Lagrange Untermannigfaltigkeit von $T^*(X_1 \times X_2)$. Falls also $\tilde{Y}_S$ der Graph einer Funktion $\phi : T^*X_1 \to T^*X_2$ ist, ist $\phi : T^*M_1 \to T^*M_2$ ein Symplektomorphismus.

Beispiel: Sei $X_1 = R^m = X^2$. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} S : X_1 \times X_2 &\to R \\ R^m \times R^m &\to R \\ (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) &\mapsto -\frac{1}{2}|x-y|^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2 \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}_X S - \mathrm{d}_Y S)|_{x,y} &= \sum_{j=1}^m \partial_{x^j} S \mathrm{d}x^j|_x - \partial_{y^j} S \mathrm{d}y^j|_y \\ &= \sum_{i,j=1}^m -\frac{1}{2}(2\delta_{ij}x_i - 2\delta_{ij}y_i)\mathrm{d}x^j|_x + \frac{1}{2}(-2\delta_{ij}x_i|_x + 2\delta_{ij}y_i)\mathrm{d}y^j|_y \\ &= \sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}x^i|_x + (-x_i + y_i)\mathrm{d}y^i|_y \end{aligned}$$

Gesucht ist also eine Funktion $\phi : T^*X_1 \to T^*X_2$, die $\sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}x^i|_x$ auf $\sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}y^i$ abbildet.
Behauptung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : T^*R^m &\to T^*R^m \\ \sum_{i=1}^m p_i \mathrm{d}x^i|_x &\mapsto \sum_{i=1}^m p_i \mathrm{d}x^i|_{x+p} \end{aligned}$$

erfüllt diese Bedingung, wobei $p := (p_1, \ldots, p_n)$.
Beweis:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}x^i|_x\right) = \sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}x^i|_{x+(-x+y)} = \sum_{i=1}^m (-x_i + y_i)\mathrm{d}x^i|_y$$

Stellen wir die Funktion ϕ in der durch die Standard-Karte

$$\mathrm{id} : R^m \to R^m; \quad x \mapsto x;$$

des R^m induzierte Karte des T^*R^m

$$\Phi : T^*R^m \to R^{2m}; \quad \sum_{i=1}^{m} p^i \mathrm{d}x^i|_x \mapsto (x,p);$$

dar, hat obige Aussage die Form:

$$\begin{aligned} \phi : R^{2m} &\to R^{2m} \\ (x,p) &\mapsto (x+p,p) \end{aligned}$$

bzw.

$$\phi\left((x,-x+y)\right) = (x+(-x+y), -x+y) = (y, -x+y)$$

Wir wollen nun noch einmal (in der Karte Φ) überprüfen, dass ϕ wirklich ein Symplektomorphismus ist: Mit

$$\begin{aligned} \phi^*\mathrm{d}x^i &= \sum_{j=1}^{m} ((\phi^*\mathrm{d}x^i)\partial_{x^j})\mathrm{d}x^j + (\phi^*\mathrm{d}x^i)(\partial_{p^j})\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{d}x^i)(\phi_*\partial_{x^j})\mathrm{d}x^j + (\mathrm{d}x^i)(\phi_*\partial_{p^j})\mathrm{d}p^j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\phi_*\partial_{x^j})x_i\mathrm{d}x^j + (\phi_*\partial_{p^j})x_i\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x^j}(x_i \circ \phi)\mathrm{d}x^j + \partial_{p^j}(x_i \circ \phi)\mathrm{d}p^j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \partial_{x^j}(x_i + p_i)\mathrm{d}x^j + \partial_{p^j}(x_i + p_i)\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\mathrm{d}x^j + \delta_{ij}\mathrm{d}p^j = \mathrm{d}x^i + \mathrm{d}p^i \\ \phi^*\mathrm{d}p^i &= \sum_{j=1}^{m} ((\phi^*\mathrm{d}p^i)\partial_{x^j})\mathrm{d}x^j + (\phi^*\mathrm{d}p^i)(\partial_{p^j})\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{d}p^i)(\phi_*\partial_{x^j})\mathrm{d}x^j + (\mathrm{d}p^i)(\phi_*\partial_{p^j})\mathrm{d}p^j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\phi_*\partial_{x^j})p_i\mathrm{d}x^j + (\phi_*\partial_{p^j})p_i\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x^j}(p_i \circ \phi)\mathrm{d}x^j + \partial_{p^j}(p_i \circ \phi)\mathrm{d}p^j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \partial_{x^j}p_i\mathrm{d}x^j + \partial_{p^j}p_i\mathrm{d}p^j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\mathrm{d}p^j = \mathrm{d}p^i \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \phi^*\omega_{\mathrm{can}} = \phi^*\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p^i\right) &= \sum_{i=1}^{m} (\phi^*\mathrm{d}x^i) \wedge (\phi^*\mathrm{d}p^i) = \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{d}x^i + \mathrm{d}p^i) \wedge \mathrm{d}p^i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p^i = \omega_{\mathrm{can}} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 24

Aufgabenstellung. *Das sphärische Pendel*
kinetische Energie: $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$,
Potential (Erdanziehung): $V = mgz$

(a) *Bestimme die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten* $L : L(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = K - V$

(b) *Bestimme die zugehörige Hamiltonsche Funktion auf* $(T^*S^2, \omega_{can}$ *mittels der Legendre-Transformation* $(TS^2 \to T^*S)$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}; \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$$
$$H(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L$$

Die kanonische symplektische Struktur ist

$$\omega_{can} = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}p_\theta + \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}p_\phi$$

(Achtung: In Kugelkoordinaten ist H *am Nord- und Südpol singulär.)*

(c) *Zeige, dass* $T^*S, \omega_{can}, H)$ *ein integrables System ist, mit unabhängiger Erhaltungsgröße* $J(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = p_\phi$.

(d) *Bestimme alle Punkte* $q \in S^2$ *(ohne Nord- und Südpol), auf denen* $\mathrm{d}H$ *und* $\mathrm{d}J$ *linear unabhängig sind:*

   (i) *Für jeden Punkt* $q \in S^2$ *mit* $z < 0$ *(südliche Hemisphäre) existieren genau zwei Punkte* p_+, $p_- \in T^*S^2$ $(\pi(p_\pm) = q$*; wobei* $\pi : T^*S^2 \to S^2)$*, so dass* $\mathrm{d}H|_{p_\pm}$ *und* $\mathrm{d}J|_{p_\pm}$ *linear unabhängig sind. Bestimme die Punkte.*

   (ii) *Zeige, dass* $\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}J$ *entlang des Hamiltonschen Flusses durch* $p_\pm$ *linear abhängig sind. (Die Flüsse zu* J *und* H *stimmen überein.) Wie sieht die zugehörige Bewegung auf der Sphäre aus?*

Gegeben ist also die Lagrange-Funktion $L : TM \to R$, $L = K - V$ in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$L_{(x,y,z)} : T_{(x,y,z)}R^3 \to R$$
$$(\dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{z}\partial_z)|_{(x,y,z)} \mapsto \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

(a)

Wählen wir eine andere Karte, so erhalten wir mit

$$x = l\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = l\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = l\cos(\theta)$$

für einen beliebigen Tangentialvektor $\dot\theta\partial_\theta + \dot\phi\partial_\phi$ an S^2:

$$
\begin{aligned}
&L(\dot\theta\partial_\theta + \dot\phi\partial_\phi)\\
=&L(\dot\theta((\partial_\theta x)\partial_x + (\partial_\theta y)\partial_y + (\partial_\theta z)\partial_z) + \dot\phi((\partial_\phi x)\partial_x + (\partial_\phi y)\partial_y + (\partial_\phi z)\partial_z)\\
=&L(\dot\theta(l\cos(\theta)\cos(\phi)\partial_x + l\cos(\theta)\sin(\phi)\partial_y - l\sin(\theta)\partial_z) + \dot\phi(-l\sin(\theta)\sin(\phi)\partial_x + l\sin(\theta)\cos(\phi)\partial_y))\\
=&L(l\dot\theta\cos(\theta)\cos(\phi)\partial_x + l\dot\theta\cos(\theta)\sin(\phi)\partial_y - l\dot\theta\sin(\theta)\partial_z - \dot\phi l\sin(\theta)\sin(\phi)\partial_x + l\dot\phi\sin(\theta)\cos(\phi)\partial_y)\\
=&L(l(\dot\theta\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot\phi\sin(\theta)\sin(\phi))\partial_x + l(\dot\theta\cos(\theta)\sin(\phi) + \dot\phi\sin(\theta)\cos(\phi))\partial_y - l\dot\theta\sin(\theta)\partial_z)\\
=&\frac{ml^2}{2}(\dot\theta\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot\phi\sin(\theta)\sin(\phi))^2 + \frac{ml^2}{2}(\dot\theta\cos(\theta)\sin(\phi) + \dot\phi\sin(\theta)\cos(\phi))^2 + l^2\dot\theta\sin(\theta)\\
&- mgz\\
=&\frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2\cos^2(\theta)\cos^2(\phi) - 2\dot\theta\cos(\theta)\cos(\phi)\dot\phi\sin(\theta)\sin(\phi) + \dot\phi^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi)\\
&+ \dot\theta^2\cos^2(\theta)\sin^2(\phi) + 2\dot\theta\cos(\theta)\sin(\phi)\dot\phi\sin(\theta)\cos(\phi) + \dot\phi^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + \dot\theta^2\sin^2(\theta))\\
&- lmg\cos(\theta)\\
=&\frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2(\theta)) - lmg\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
p_\theta &= \partial_{\dot\theta}L = ml^2\dot\theta\\
p_\phi &= \partial_{\dot\phi}L = ml^2\dot\phi\sin^2(\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot\theta &= \frac{1}{ml^2}p_\theta\\
\dot\phi &= \frac{1}{ml^2\sin^2(\theta)}p_\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L \\
&= p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \left(\frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)) - lmg\cos(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{ml^2} p_\theta^2 + \frac{1}{ml^2 \sin^2(\theta)} p_\phi^2 - \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - \frac{1}{2ml^2 \sin^2(\theta)} p_\phi^2 + lmg\cos(\theta) \\
&= \frac{1}{2ml^2} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2(\theta)} p_\phi^2 \right) + lmg\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= (\partial_\theta H)\mathrm{d}\theta + (\partial_\phi H)\mathrm{d}\phi + (\partial_{p_\theta} H)\mathrm{d}p_\theta + (\partial_{p_\phi} H)\mathrm{d}p_\phi \\
&= -\left(\frac{\cos(\theta) p_\phi^2}{ml^2 \sin^3(\theta)} + lmg\sin(\theta) \right) \mathrm{d}\theta + \frac{p_\theta}{ml^2}\mathrm{d}p_\theta + \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2(\theta)}\mathrm{d}p_\phi \overset{!}{=} \omega(X_H)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\omega = \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}p_\theta + \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}p_\phi = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}p_\theta + \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}p_\phi - \mathrm{d}p_\theta \otimes \mathrm{d}\theta - \mathrm{d}p_\phi \otimes \mathrm{d}\phi
$$

$$
\begin{aligned}
\omega : TS^2 &\to T^*S^2 \\
\partial_\theta &\mapsto \mathrm{d}p_\theta \\
\partial_\phi &\mapsto \mathrm{d}p_\phi \\
\partial_{p_\theta} &\mapsto -\mathrm{d}\theta \\
\partial_{p_\phi} &\mapsto -\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^{-1} : T^*S^2 &\to TS^2 \\
\mathrm{d}p_\theta &\mapsto \partial_\theta \\
\mathrm{d}p_\phi &\mapsto \partial_\phi \\
\mathrm{d}\theta &\mapsto -\partial_{p_\theta} \\
\mathrm{d}\phi &\mapsto -\partial_{p_\phi}
\end{aligned}
$$

folgt

$$
X_H = \omega^{-1}(\mathrm{d}H) = \left(\frac{\cos(\theta) p_\phi^2}{ml^2 \sin^3(\theta)} + lmg\sin(\theta) \right) \partial_{p_\theta} + \frac{p_\theta}{ml^2}\partial_\theta + \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2(\theta)}\partial_\phi
$$

Da $n = 2$, ist eine zweite Funktion gesucht, die mit H Poisson-kommutiert und deren Differential auf einer dichten Teilmenge von T^*S^2 linear unabhängig ist von $\mathrm{d}H$. Offensichtlich Poisson-kommutiert die Funktion

$$\begin{aligned} J{:}T^*S^2 &\to R \\ x &\mapsto p_\phi(x) \end{aligned}$$

mit H:

$$0 = X_H J = \mathrm{d}H(X_J) = \omega(X_J, X_H) = \{H, J\}$$

und die Differentiale $\mathrm{d}H$ und $\mathrm{d}J$ sind auf einer in T^*S^2 dichten Menge linear unabhängig. Welche Menge genau?

(d)

Offensichtlich sind $\mathrm{d}H$ und $\mathrm{d}J$ genau dann linear abhängig, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p_\theta}{ml^2} \quad \text{und} \\ 0 &= \frac{\cos(\theta)p_\phi^2}{ml^2\sin^3(\theta)} + lmg\sin(\theta) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= p_\theta \quad \text{und} \\ p_\phi^2 &= -m^2gl^3\sin^4(\theta)/\cos(\theta) \end{aligned}$$

Die rechte Seite der unteren Gleichung ist für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ negativ und für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ positiv. Im ersten Fall (also auf der oberen Halbkugel) hat also die zweite Gleichung keine Lösung und $\mathrm{d}H$ und $\mathrm{d}J$ sind somit überall linear unabhängig, im zweiten Fall (also auf der unteren Halbkugel) hat die Gleichung die zwei Lösungen

$$0 = p_\theta; \quad p_\phi = \pm ml\sin^2(\theta)(-gl/\cos(\theta))^{\frac{1}{2}} \ .$$

Das ist offensichtlich eine Nullmenge. Damit handelt es sich hierbei um ein Integrables System. An den Punkten, an denen $\mathrm{d}H$ und $\mathrm{d}J$ linear abhängig sind, gilt

$$X_H = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2(\theta)}\partial_\phi = \pm(-g/l\cos(\theta))^{\frac{1}{2}}\partial_\phi$$

d.h., es findet nur Bewegung "in Richtung ϕ" statt, θ, p_ϕ und p_θ sind konstant (p_ϕ gleich Null). Damit bleiben die beiden Gleichungen entlang der Kurven erfüllt. Auf den Kurven ändert sich nur der Winkel ϕ (gleichmäßig), es handelt sich also um proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kleinkreise, "Breitengrade"; die zwei Lösungen entsprechen den zwei möglichen Umlaufrichtungen.

Aufgabe 25

Aufgabenstellung. *Zeige, dass für $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ die adjungierte Darstellung durch das Matrizenprodukt*

$$\mathrm{Ad}_g(X_e) = gX_eg^{-1} \qquad X_e \in \mathrm{gl}(n, R),\ g \in \mathrm{Gl}(n, R)$$

gegeben ist.

Es ist die Darstellung Φ einer Liegruppe G auf sich selbst durch Konjugation

$$\begin{aligned} \Phi : G &\to \mathrm{Diff}(G) \\ g &\mapsto \Phi_g \end{aligned}$$

wobei für ein festes $g \in G$:

$$\begin{aligned} \Phi_g : G &\to G \\ a &\mapsto gag^{-1} \end{aligned}$$

und die adjungierte Darstellung von G auf der zugehörigen Liealgebra $\mathfrak{g}$ (linksinvariante Vektorfelder)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

wobei für ein festes $g \in G$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ X &\mapsto (\Phi_g)_* X \end{aligned}$$

der Push-Forward linksinvarianter Vektorfelder mit der Konjugation.
Für linksinvariante Vektorfelder $X = \sum_{i,j=1}^n X^{ij}\partial_{ij}$ (erhalten unter Push-Forward mit der Links-Multiplikation) gilt nach der Vorlesung (unter Bsp. 5.10):

$$(X^{ij})|_h = (hX_e)^{ij}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (\Phi_g)_*\partial_{ij} &= \sum_{k,l=1}^n ((\Phi_g)_*\partial_{ij})(h^{kl})\partial_{kl} = \sum_{k,l=1}^n (\partial_{ij}(h^{kl} \circ \Phi_g))\partial_{kl} = \sum_{k,l=1}^n (\partial_{ij}(ghg^{-1})^{kl})\partial_{kl} \\ &= \sum_{k,l=1}^n g^{ki}(g^{-1})^{jl}\partial_{kl} \end{aligned}$$

wobei Gleichheit beim letzten "=" gilt wegen

$$\begin{aligned}\partial_{ij}(ghg^{-1})^{kl} &= \partial_{ij}\sum_{m,p=1}^{n}(g_{km}h_{mp}(g^{-1})_{pl} = \sum_{m,p=1}^{n}\partial_{ij}(g_{km}h_{mp}(g^{-1})_{pl}\\ &= \sum_{m,p=1}^{n} g_{km}(\partial_{ij}h_{mp})(g^{-1})_{pl} = \sum_{m,p=1}^{n}\delta_{im}\delta_{jp}g_{km}(g^{-1})_{pl} = g_{ki}(g^{-1})_{jl}\end{aligned}$$

und somit gilt für das durch X_e im Neutralen Element e von G festgelegte linksinvariante Vektorfeld $X(h) = \sum_{i,j=1}^{n}(hX)^{ij}\partial_{ij}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_g(X) = (\Phi_g)_*X = (\Phi_g)_*\left(\sum_{i,j=1}^{n}(hX_e)^{ij}\partial_{ij}\right) &= \sum_{i,j=1}^{n}((hX_e)^{ij}\circ\Phi_g)(\Phi_g)_*\partial_{ij}\\ = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ki}((ghg^{-1})X_e)^{ij}(g^{-1})^{jl}\partial_{kl} &= \sum_{k,l=1}^{n}(g(ghg^{-1})X_eg^{-1})^{kl}\partial_{kl}\end{aligned}$$

Das bedeutet für die zu X gehörige Koeffizientenmatrix X_e (im neutralen Element $e \in G$ auswerten):

$$\mathrm{Ad}_g(X_e) = g(geg^{-1})X_eg^{-1} = g(gg^{-1})X_eg^{-1} = geX_eg^{-1} = gX_eg^{-1}$$

Aufgabe 25

Betrachte die Lie-Gruppe $G = \mathrm{Gl}(n, R)$. Wir werden nun mehrere Darstellungen von G betrachten:

- die Darstellung durch Konjugation Φ auf G selbst
- ie Darstellung durch Konjugation Ad auf der zughörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$ und
- in Aufgabe 27 die Ko-adjungierte Darstellung auf der zughörigen Lie-Koalgebra $\mathfrak{g} = T_e^*G$.

Für $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ sind folgende Räume isomorph (als Vektorräume): Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_eG$, die Lie-Koalgebra $\mathfrak{g}^* = T_e^*G$, der Raum der $n \times n$-Matrizen $R^{n\times n}$ und dessen Dualraum $(R^{n\times n})^*$. Wir identifizieren die Räume mit Hilfe von Vektorraum-Isomorphismen, die die folgenden Basen identifizieren:

- $R^{n\times n}$ mit Basis $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$, wobei E_{ij} die Martrix ist, bei der in der i-ten Zeile und j-ten Spalte 1 steht und sonst Nullen: $(E_{ij})^{kl} = \delta_i^k\delta_j^l$.
- $(R^{n\times n})^*$ mit der dazu dualen Basis $\{x^{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$, also $x^{ij} : R^{n\times n} \to R$, $x^{ij}(A) := A^{ij}$
  Die "Komponenten-Funktionen" x^{ij} bilden eine Karte x für den $R^{n\times n}$, ihre Einschränkung auf $\mathrm{Gl}(n, R)$ eine Karte für $\mathrm{Gl}(n, R)$.

- T_eG mit der von x induzierten Basis aus partiellen Ableitungen $\{\partial_{ij}|_e \mid i,j = 1,\dots,n\}$ und
- T_e^*G mit der dazu dualen Basis $\{\mathrm{d}x^{ij}|_e \mid i,j = 1,\dots,n\}$, bestehend aus den Differentialen der Koordinatenfunktionen x^{ij} .

Dadurch können wir Ad und Ad* auch als Darstellung auf jedem der anderen Vektorräume auffassen, insbesondere auf $(R^{n\times n})^*$.

Wir haben also folgendes kommutierende Diagramm von Vektorräumen, auf denen G dargestellt werden kann: G mit Darstellung Φ

$$\begin{array}{ccc}
T_eG & \leftrightarrow & T_e^*G \\
\text{Basis: } \{\partial_{ij}|_e\} & & \text{Basis: } \{\mathrm{d}x^{ij}|_e\} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
R^{n\times n} & \leftrightarrow & (R^{n\times n})^* \\
\text{Basis: } \{E_{ij}\} & & \text{Basis: } \{x^{ij}\}
\end{array}$$

Darstellung durch Konjugation

Als erstes Betrachten wir die Darstellung Φ einer Lie-Gruppe G auf sich selbst durch Konjugation

$$\begin{aligned}
\Phi : G &\to \mathrm{Diff}(G) \\
g &\mapsto \Phi_g
\end{aligned}$$

wobei für ein festes $g \in G$:

$$\begin{aligned}
\Phi_g : G &\to G \\
a &\mapsto gag^{-1}
\end{aligned}$$

Adjungierte Darstellung auf der Lie-Algebra

Als nächstes betrachten wir die zu Φ adjungierte Darstellung Ad von G auf der zugehörigen Lie-Algebra $\mathsf{g} = T_eG$. Sie ist definiert über den Push-Forward: Ad_g bildet einen Tangentialvektor $v \in T_eG$ ab auf den Wert desjenigen Vektorfelds in e, das man durch Push-Forward mit Φ_g aus dem durch v eindeutig festgelegten linksinvarianten Vektorfeld X_v erhält:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad} : G &\to \mathrm{Gl}(\mathsf{g}) \\
g &\mapsto \mathrm{Ad}_g
\end{aligned}$$

wobei für ein festes $g \in G$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{g} \\ v &\mapsto ((\Phi_g)_* X_v)|_e \end{aligned}$$

In unserem Fall $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ ist das durch einen Tangentialvektor $v = \sum_{i,j=1}^n X_e^{ij} \partial_{ij}|_e \in T_e \mathrm{Gl}(n, R)$ (enstspricht $X_e \in R^{n \times n}$) festgelegte linksinvariante Vektorfeld X_v auf $\mathrm{Gl}(n, R)$ gegeben durch

$$X_v = \sum_{ij=1}^n (xX_e)^{ij} \partial_{ij} \ .$$

(siehe Vorlesungsskript, unter Bsp. 5.10). Damit erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} (\Phi_g)_* \partial_{ij} &= \sum_{k,l=1}^n ((\Phi_g)_* \partial_{ij})(x^{kl}) \partial_{kl} = \sum_{k,l=1}^n (\partial_{ij}(x^{kl} \circ \Phi_g)) \partial_{kl} = \sum_{k,l=1}^n (\partial_{ij}(gxg^{-1})^{kl}) \partial_{kl} \\ &= \sum_{k,l=1}^n g^{ki} (g^{-1})^{jl} \partial_{kl} \ , \end{aligned}$$

wobei Gleichheit beim letzten "=" gilt wegen

$$\begin{aligned} \partial_{ij}(gxg^{-1})^{kl} &= \partial_{ij} \sum_{m,p=1}^n (g^{km} x^{mp} (g^{-1})^{pl} = \sum_{m,p=1}^n \partial_{ij} g^{km} x^{mp} (g^{-1})^{pl} \\ &= \sum_{m,p=1}^n g^{km} (\partial_{ij} x^{mp}) (g^{-1})^{pl} = \sum_{m,p=1}^n \delta_m^i \delta_p^j g^{km} (g^{-1})^{pl} = g^{ki} (g^{-1})^{jl} \ , \end{aligned}$$

für Ad_g als Abbildung auf $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g(v) = ((\Phi_g)_* X_v)|_e &= \left.\left((\Phi_g)_* \left(\sum_{i,j=1}^n (xX_e)^{ij} \partial_{ij} \right) \right)\right|_e = \sum_{i,j=1}^n (xX_e)^{ij}|_{\Phi_g^{-1}(e)} (\Phi_g)_* \partial_{ij}|_e \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ki} (xX_e)^{ij}|_e (g^{-1})^{jl} \partial_{kl}|_e = \sum_{k,l=1}^n (gX_e g^{-1})^{kl} \partial_{kl}|_e \end{aligned}$$

und somit für Ad_g als Abbildung auf $R^{n \times n}$:

$$\mathrm{Ad}_g(X_e) = gX_e g^{-1} \ .$$

Aufgabe 26

Aufgabenstellung. *Zeige, dass für $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ der Fluss $\sigma_t(e)$ des linksinvarianten Vektorfeles $X \in \xi_l(G)$ gegeben ist durch*

$$\sigma_t(e) = \exp(tX_e)$$

Weiter ist

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tX_e)}Y_e|_{t=0} = [X_e, Y_e] =: \mathrm{ad}_{X_e}Y_e$$

Betrachte das linksinvariante Vektorfeld

$$\begin{aligned} X : G &\to TG \\ g &\mapsto \sum_{i,j=1}^{n} (gX_e)^{ij}\partial_{ij}|_g \end{aligned}$$

und die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : R &\to G \\ t &\mapsto \exp(tX_e)\ . \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_*\partial_t|_t &= \sum_{i,j=1}^{n} (\gamma_*\partial_t)(h^{ij})\partial_{ij}|_{\gamma(t)} = \sum_{i,j=1}^{n} (\exp(tX_e)_*\partial_t)(h^{ij})\partial_{ij}|_{\exp(tX_e)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_t(h^{ij} \circ \exp(tX_e))\partial_{ij}|_{\exp(tX_e)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (\exp(tX_e)X_e)^{ij}\partial_{ij}|_{\exp(tX_e)} = X|_{\exp(tX_e)} \end{aligned}$$

Damit ist γ eine Integralkurve von X.

Außerdem ist für $X_e, Y_e \in G = \mathrm{Gl}(n, R)$ der Tangentialvektor bei $t = 0$ an die Kurve

$$\begin{aligned} \theta : R &\to G \\ t &\mapsto \mathrm{Ad}_{\exp(tX_e)}Y_e\ . \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
\theta_* \partial_t|_{t=0} &= \sum_{i,j=1}^{n} (\theta_* \partial_t|_{t=0})(h^{ij}) \partial_{ij}|_{\theta(0)} = \sum_{i,j=1}^{n} ((\mathrm{Ad}_{\exp(tX_e)} Y_e)_* \partial_t|_{t=0})(h^{ij}) \partial_{ij}|_{\mathrm{Ad}_{\exp(0 \cdot X_e)} Y_e} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t|_{t=0} (h^{ij} \circ (\mathrm{Ad}_{\exp(tX_e)} Y_e)) \partial_{ij}|_{\mathrm{Ad}_e Y_e} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_t|_{t=0} (h^{ij} \circ (\exp(tX_e) Y_e \exp(tX_e)^{-1})) \partial_{ij}|_{e Y_e e^{-1}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \circ ((\partial_t|_{t=0} \exp(tX_e)) Y_e) + h^{ij} \circ (Y_e (\partial_t|_{t=0} \exp(-tX_e))) \partial_{ij}|_{Y_e} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \circ (X_e Y_e) + h^{ij} \circ (Y_e(-X_e)) \partial_{ij}|_{Y_e} = \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \circ (X_e Y_e - Y_e X_e) \partial_{ij}|_{Y_e} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h^{ij} \circ [X_e, Y_e] \partial_{ij}|_{Y_e} = \sum_{i,j=1}^{n} [X_e, Y_e]^{ij} \partial_{ij}|_{Y_e} =: \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{ad}_{X_e} Y_e)^{ij} \partial_{ij}|_{Y_e}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27

Aufgabenstellung. *Wie wirkt* Ad *für* $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ *auf* $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*(n, R)$*?*

Ko-adjungierte Darstellung auf der Lie-Koalgebra

Wir betrachten nun eine weitere Darstellung der Lie-Gruppe aus Aufgabe 25. Die koadjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}^*$ ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^* : G &\to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}^*) \\
g &\mapsto \mathrm{Ad}^*_g
\end{aligned}$$

wobei für ein festes $g \in G$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^*_g : \mathfrak{g}^* &\to \mathfrak{g}^* \\
\xi &\mapsto \mathrm{Ad}^*_g(\xi)
\end{aligned}$$

wobei $(\mathrm{Ad}^*_g \xi) : X \mapsto \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X))$.

In unserem Fall $G = \mathrm{Gl}(n, R)$ identifizieren wir wie in Aufgabe 25 beschrieben $\mathfrak{g}^*$ zunächst mit $(R^{n \times n})^*$ und betrachten Ad^*_g als Abbildung auf $(R^{n \times n})^*$. Wir erhalten wir für ein $\xi = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} x^{ij} \in (R^{n \times n})^* \mathrm{Gl}(n, R)$ (enstspricht $\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} \mathrm{d}x^{ij}|_e \in T^*_e \mathrm{Gl}(n, R)$ bzw. der Matrix $(\xi_{ij}) \in R^{n \times n}$). Damit erhält man wegen

$$x^{kl}(g^{-1} E_{ij} g) = (g^{-1} E_{ij} g)^{kl} = \sum_{m,p=1}^{n} ((g^{-1})^{km} (E_{ij})^{mp} (g)^{pl} = \sum_{m,p=1}^{n} (g^{-1})^{km} \delta^i_m \delta^j_p g^{pl} = (g^{-1})_{ki} g_{jl} \ ,$$

für Ad_g^* als Abbildung auf $(R^{n\times n})^*$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_g^*(\xi) &= \sum_{i,j=1}^{n}((\mathrm{Ad}_g^*(\xi))E_{ij})x^{ij} = \sum_{ij=1}^{n}(\xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}E_{ij})x^{ij} \\
&= \sum_{ij=1}^{n}(\xi(g^{-1}E_{ij}g))x^{ij} = \sum_{ijkl=1}^{n}(\xi_{kl}x^{kl}(g^{-1}E_{ij}g))x^{ij} = \sum_{ijkl=1}^{n}((g^{-1})^{ki}\xi_{kl}g^{jl})x^{ij} \\
&= \sum_{ijkl=1}^{n}(((g^{-1})^T)^{ik}\xi_{kl}(g^T)^{lj})x^{ij} = \sum_{ij=1}^{n}((g^{-1})^T(\xi_{ij})g^T)^{ij}x^{ij}
\end{aligned}$$

Das bedeutet für Ad_g^* als Abbildung auf $R^{n\times n}$

$$\mathrm{Ad}_g^*((\xi_{ij})) = (g^{-1})^T(\xi_{ij})g^T$$