

Einführung in die Symplektische Geometrie ①

Literatur: - Lectures on Symplectic Geometry, Ana Cannas da Silva

- Introduction to Symplectic Topology, McDuff-Salamon

- Symplectic Geometry, Eckhard Meinrenken
(online, Postscript)

Einführung in die symplektische Geometrie ①

0. Geschichte, Motivation

Die symplektische Geometrie (SG) hat ihre Wurzeln in der klassischen Mechanik (Planetenbewegungen, Pendel, ...).

Das Variationsprinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung) und der Übergang zur Hamiltonschen Beschreibung führen in natürlicher Weise auf den Begriff der symplektischen Struktur.

Def 0.1: Gegeben sei ein reeller Vektorraum V .

Eine symplektische Struktur auf V ist eine anti-symmetrische, nicht-entartete Bilinearform

$$\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Das Paar (V, ω) wird symplektischer Vektorraum genannt.

Bem: anti-symm.: $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$, $\forall u,v \in V$.

nicht-entartet: $\omega(u,v) = 0 \ \forall v \in V \Rightarrow u = 0$.

Ursprung des Begriffs:

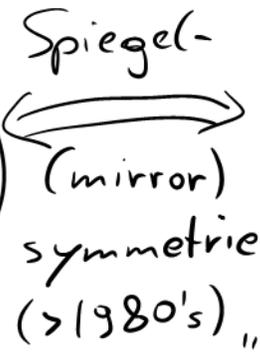
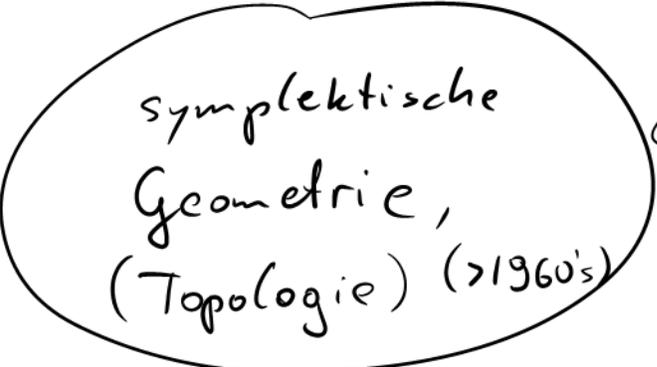
verschränkt, geflochten

GRIECHISCH (plektos)

LATEINISCH (plicare)

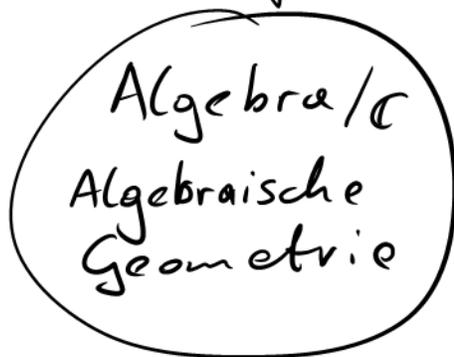
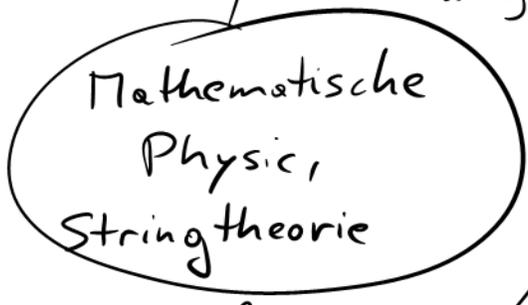
sym-plektisch

kom-plex



relativ "junges"
Teilgebiet der Geometrie,
erst in den letzten 20-30
Jahren von den Wurzeln
in der Mechanik
emanzipiert.

"altes" etabliertes Gebiet
der Geometrie
komplexe Zahlen
sind algebraisch
abgeschlossen



sehr aktive Forschungsfelder

0.1 Von klassischer Mechanik zu sympl. Geom. ⁽³⁾

(McDuff-Salamon, Kap. 1)

Wähle Koordinaten $(q, v) = (q_1, \dots, q_n, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

und Zeit $t \in I = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$

Def. 0.2: Es sei $L: I \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, (t, q, v) \mapsto L(t, q, v)$

eine 2-fach stetig ableitbare Funktion

($L \in C^2(I \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$). Weiters sei $q: I \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$t \mapsto q(t)$ ein Pfad, $q(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, mit

Randbedingung $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$. Dann heißt

das Integral

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \quad \left(\dot{q} = \frac{dq}{dt} \right)$$

eine Wirkung und L die zugehörige

Lagrange-Funktion.

Bsp. 0.3

$$(a) n=1, \quad L(t, q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2$$

ist die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators.

(4)

(b) $n=1$, $L(t, q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$ mit

$$V(q) = -\cos(q)$$

ist die Lagrange-Funktion des Pendels.

Def 0.4 Ein Pfad $q \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ heißt minimal falls $S[q] \leq S[q + \zeta]$ für alle $\zeta \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\zeta(t_0) = \zeta(t_1) = 0$.

Lemma (Def) 0.5: Ein minimaler Pfad $q \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ist eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung

$$(EL): \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, q, \dot{q}).$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \right).$$

Beweis 0.5: Wenn $q(t)$ minimal ist, dann gilt $\forall \zeta \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$:

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[q + \varepsilon \zeta] \right|_{\varepsilon=0} =$$

Bem: Wegen der Invertierbarkeit von $\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k}$ folgt ⑥
 aus dem Satz über implizite Funktionen, dass
 der Koordinatenwechsel invertierbar ist, d.h.
 es existieren Funktionen $G^k: I \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $k=1, \dots, n$,
 sodass $v^k = G^k(t, x, p)$.

In den neuen Koordinaten kann die Euler-Lagr.-
 Gleichung als System von Differentialglg. 1. Ordnung
 geschrieben werden.

Def 0.7: Die Funktion $H: I \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(t, q, p) = \sum_{j=1}^n p_j G^j(t, q, p) - L(t, q, G(t, q, p)),$$

heißt Hamiltonsche Funktion.

Es gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial G^j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_j} \Big|_{v=G} \frac{\partial G^j}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

" p_j

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dots = G^k$$

weilers: $\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k}(t, q, \dot{q}) \right) \stackrel{EL}{=} \frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}$, $\dot{q}^k = G^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$

Daraus folgt:

⑦

Lemma (Def) 0.8: Der Pfad $\gamma = (q(t), p(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ erfüllt die Hamiltonschen Differentialgleichungen

$$(HD) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

genau dann wenn $q(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt.

Übungsaufgabe 1:

Bestimme die EL für Bsp. 0.3 (a,b), sowie die Legendre-Transformation, die Hamiltonsche Funktion und die HD.

Bem.: Wenn $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}$ invertierbar ist, dann existiert die inverse Legendre-Transformation

$$(q, p) \rightarrow (q, v = \frac{\partial H}{\partial p}) .$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung gilt aber auch direkt im Hamilton-Formalismus:

Lemma 0.9: Ein Pfod $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $\gamma(t) = (q(t), p(t)) \in$

$C^1(I, \mathbb{R}^{2n})$, ist genau dann eine Lösung der Hamiltonschen

Diff.-Gleichungen, wenn er ein kritischer Punkt von

$$S_H[q, p] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(t, q, p) \right) dt$$

ist (mit $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$, fixiert).

Bew. 0.9: wie Beweis von Lemma 0.5 \square

Def 0.10: S_H heißt Hamiltonsche Wirkung, und

$$\lambda_H = \sum_{j=1}^n p_j dq_j - H dt \text{ die } \underline{\text{Wirkungsform.}}$$

Def. 0.11: Der symplektische Vektorraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit Koordinaten $x = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ und

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0_n \end{pmatrix}$$

heißt symplektischer Standard-VR und ω_0

ist die symplektischer Standardstruktur.

Bem 0.12: Die Hamiltonschen Diff.-Gleichungen in 0.8 können mit Hilfe der symplektischen Standardstruktur geschrieben werden:

$$\dot{x}_k = -\sum_{j=1}^{2n} (\omega_0^{-1})_{kj} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad \forall k=1, \dots, 2n.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Def 0.13: Das Vektorfeld

$$(X_H)_k := -\sum_{j=1}^{2n} (\omega_0^{-1})_{kj} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

heißt Hamiltonsches Vektorfeld oder symplektischer Gradient von H .

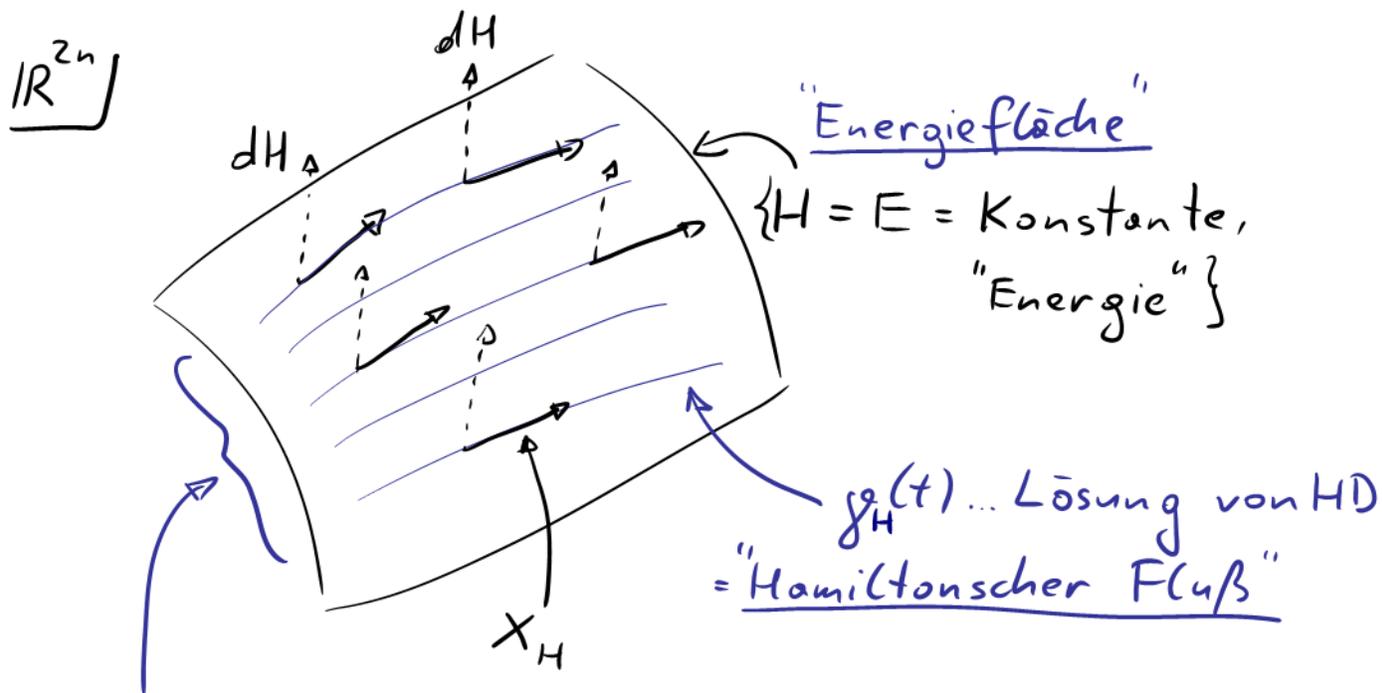
Bem: von nun an: Annahmen:

- alle Abbildungen (Pfade, Hamiltonsche Funkt.) seien C^∞ , z. B. Koordinatenwechsel sind Diffeomorphismen (C^∞ & invertierbar)
- Hamiltonsche Funktion ist zeitunabhängig

$$H(t, x) = H(x)$$

Lemma 0.14: Der Pfad $\gamma_H(t)$ erfülle die HD, und H sei zeitunabhängig. Dann ist H konstant entlang des Pfades γ :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \dot{x}_j = - \sum_{j,k} \frac{\partial H}{\partial x_j} (\omega_0^{-1})^{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0$$



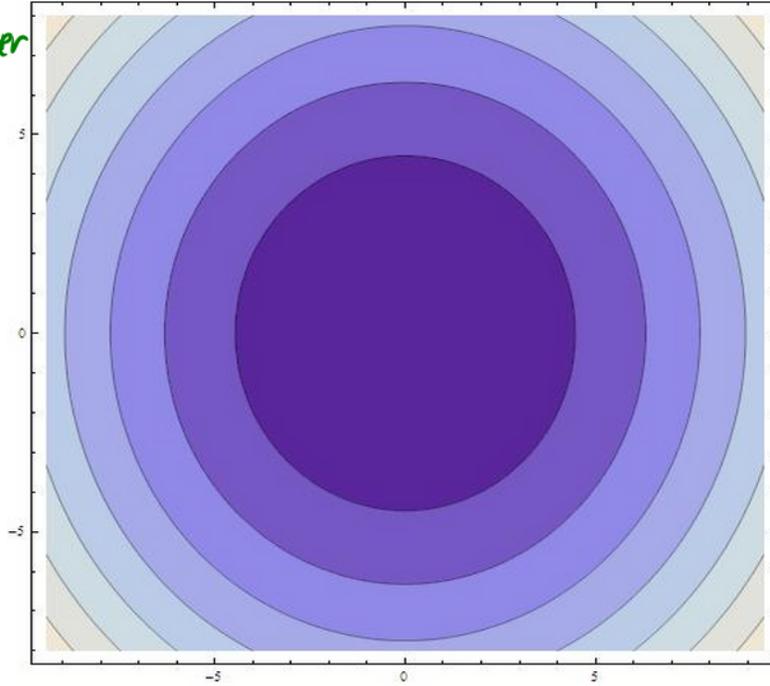
"charakteristische Blätterung", Blatt = "Charakteristik"

- Fragen:
- ① Wenn die Energiefläche $\{H = \text{konst.}\}$ kompakt ist, existiert immer eine geschlossene Charakteristik? NEIN (für $n \geq 3$)
 - ② Falls nein, gibt es eine zusätzliche geometrische Eigenschaft sodass ① erfüllt ist?
 JA(?) \rightsquigarrow Kontaktstruktur
Vermutung von Weinstein

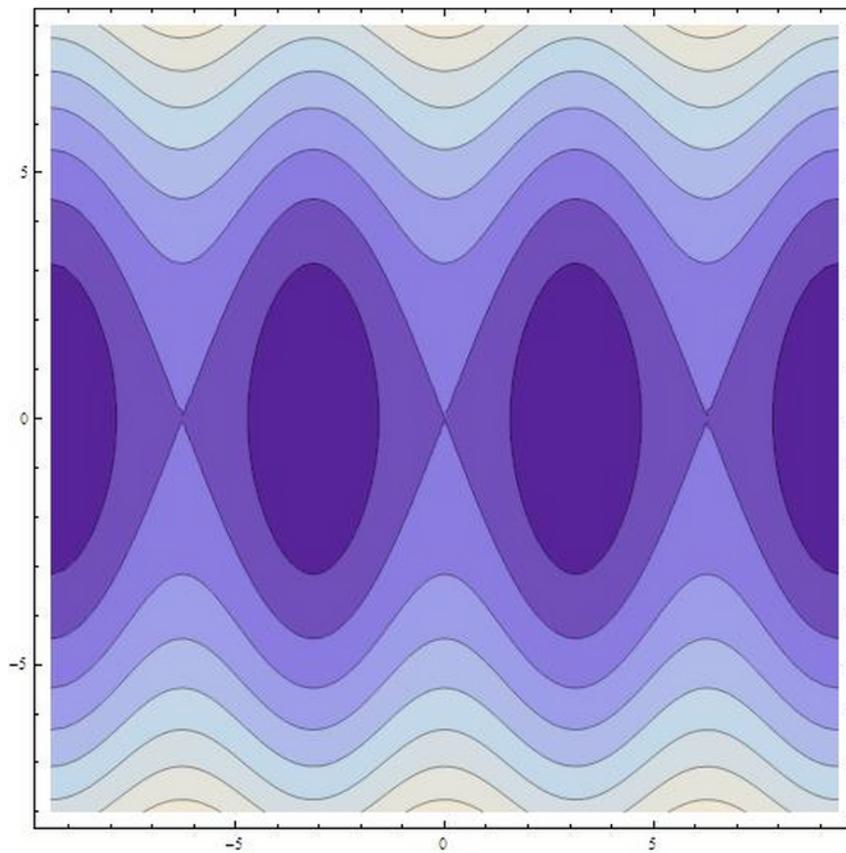
Übungsaufgabe 2:

Bestimme die Energieflächen bzw. Hamiltonsche Vektorfeld in Bsp. 0.3 (a,b), und stelle diese graphisch dar.

(a) Harmonischer Osz.



(b) Pendel



(12)

Def 0.15: Es sei $\gamma_H(t): I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ein Hamiltonscher Fluß (= Lösung der HD) bzgl. H , dann heißt $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) (= C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}))$ eine Erhaltungsgröße falls $F \circ \gamma$ konstant ist.

Lemma 0.16: $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist genau dann eine Erhaltungsgröße für den Hamiltonschen Fluß γ_H , falls

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial H}{\partial x_j} (\omega_0^{-1})^{jk} \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$$

Def 0.17: Die anti-symm., bilineare Abbildung $\{.,.\}: C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \times C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\text{mit } \{F, G\} = \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial x_j} (\omega_0^{-1})^{jk} \frac{\partial G}{\partial x_k}$$

heißt Poissonklammer.

Bew 0.16: Schreibe $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_{2n}(t))$

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \stackrel{\text{HD}}{=} - \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial F}{\partial x_j} (\omega_0^{-1})^{jk} \frac{\partial H}{\partial x_k} = \{H, F\} = 0$$

□

Übungsaufgabe 3:

(13)

(a) Zeige $\{F, a\} = -\omega_0(X_F, X_a)$

(b) $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist eine Lie-Algebra, d.h. ein Vektorraum mit einer anti-symmetrischen Klammeroperation $\{\cdot, \cdot\}$, die die Jacobi-Identität erfüllt:

$$\{\{F, a\}, H\} = \{\{F, H\}, a\} + \{F, \{a, H\}\}.$$

Bem.: Wenn F eine Erhaltungsgröße ist, dann kann man wegen $\{F, H\} = 0$ auch den Hamiltonschen Fluß $\gamma_F: I \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, s \mapsto \gamma_F(s) = (q(s), p(s))$ bzgl. F betrachten, d.h.

$$\frac{d\gamma_F(s)}{ds} = X_F \quad (\text{HD bzgl. } F)$$

Dann gilt auch

$$\frac{dF(\gamma_F(s))}{ds} = 0 \text{ aber auch } \frac{dH(\gamma_F(s))}{ds} = \{F, H\} = 0.$$

Def 0.18: Der symplektische Vektorraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ zusammen mit einer Hamiltonschen Funktion $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ heißt Hamiltonsches System $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H)$.

Es heißt (komplet) integrierbar falls n unabhängige
Poisson-kommutierende Erhaltungsgrößen
 F_1, \dots, F_n existieren. (14)

Bem.: Poisson-komm.: $\{F_a, F_b\} = 0 \quad \forall a, b = 1, \dots, n$

unabhängig: $\left(\frac{\partial F_a}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F_b}{\partial x}\right)$ sind linear unabh.
 $\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$.

H ist eine Funktion der Erhaltungsgrößen:

$$H = H(F_1, \dots, F_n).$$

Jede der n Funktionen kann ein Hamiltonsche
Fluß zugeordnet werden, $\mathcal{F}_{F_1}(s_1), \dots, \mathcal{F}_{F_n}(s_n)$ und

$$\frac{dF_a}{ds_b} = \{F_b, F_a\} = 0, \quad \forall a, b = 1, \dots, n.$$

Lemma 0.19: Falls $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H)$ integrierbar ist, mit
Erhaltungsgrößen F_1, \dots, F_n , dann liegt
ein Hamiltonsche Fluß \mathcal{F}_H auf einer
Niveaumenge für ein $c \in \mathbb{R}^n$:

$$T_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid F_a(x) = c_a, \forall a = 1, \dots, n \right\}$$

T_c ist eine n -dimensionale Untermannig-

faltigkeit, auf der ω_0 verschwindet. ⁽¹⁵⁾

Bew 0.19: zweiter Teil:

① In jedem Punkt x auf T_c können wir die Hamiltonschen Flüsse zu F_1, \dots, F_n betrachten. Wegen der Unabhängigkeit von F_1, \dots, F_n sind die Tangentialvektoren

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}_{F_1}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{H}_{F_n}}{\partial s_n} \right) \text{ linear unabhängig.}$$

$\Rightarrow T_c$ ist n -dimensional.

$$\textcircled{2} \quad \omega_0 \left(\frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial s_a}, \frac{\partial \mathcal{H}_b}{\partial s_b} \right) = \omega_0 (X_{F_a}, X_{F_b}) = \langle F_b, F_a \rangle$$

□

Bem: Eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} mit diesen Eigenschaften (n -dimensional, $\omega_0 = 0$) nennt man Lagrange Unterurfk.

Diese spielen eine wichtige Rolle in der symplektischen Geometrie.

0.2. Symplektomorphismen (Kanonische Transformation) (16)

Was ist die Bedingung an Koordinatenwechsel, sodass die symplektische Struktur invariant bleibt:

Def 0.20: Ein Diffeomorphismus $\psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (d.h. invertierbar, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$) heißt Symplektomorphismus falls $\forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\omega_0(d\psi(u), d\psi(v)) = \omega_0(u, v) \quad (*)$$

gilt. Symp(\mathbb{R}^{2n}) bezeichnet den Raum der Symplektomorphismen. Falls ψ eine lineare Abbildung ist, heißt $\Phi = d\psi$ symplektische Matrix, und Sp($2n$) bezeichnet den Raum aller symplektischen Matrizen.

Bem. ① Läßt sich verallgemeinern auf beliebige symplektische Strukturen ω .

$$\textcircled{2} \quad (d\psi)_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$$

$$\textcircled{3} \quad (*) \Rightarrow \Phi^T \omega_0 \Phi = \omega_0$$

Ein Symplektomorphismus erhält das Volumen.

Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ gilt $Vol(\psi(U)) = Vol(U)$.

$$Symp(\mathbb{R}^{2n}) \subset Diff_{vol}(\mathbb{R}^{2n}) \subset Diff(\mathbb{R}^{2n})$$

Wie unterscheiden sich $Symp$ und $Diff_{vol}$?

Lässt sich zum Beispiel ein $2n$ -dimensionaler Ball

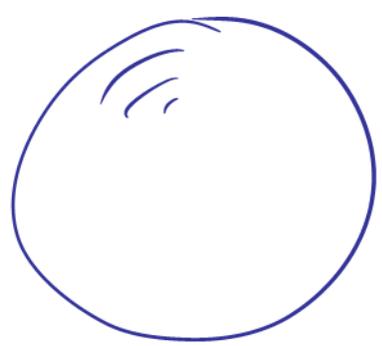
$$B^{2n}(r) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x|^2 < r\}$$

↑
Euclidische Norm

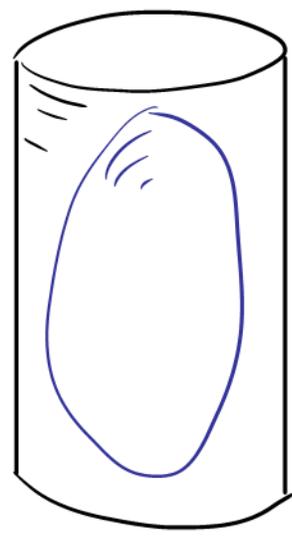
in einen $2n$ -dimensionalen, symplektischen Zylinder

$$Z^{2n}(R) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_i^2 + p_i^2 < R\}$$

einbetten falls $r > R$?



Diffvol ✓
→
Symplep ?



Satz 0.21 (Gromov's nonsqueezing theorem)

Falls eine Einbettung $\psi(B^{2n}(r)) \subset Z^{2n}(R)$
mit $\psi \in \text{Symp}(\mathbb{R}^{2n})$ existiert, dann gilt $r \leq R$.

Bem.: Einbettung: ψ ist injektiv und $d\psi$ invertierbar.

Bem. zum Beweis: Gromov führte die Methode der "J-holomorphen Kurven" ein, um diesen Satz zu beweisen. Wir werden später eine lineare Version des Satzes zeigen.

J-holomorphe Kurven spielen eine wichtige Rolle in der Relation zwischen symplektischer und komplexer Geometrie.