1. Lineare symplektische Geometrie

Notation:

V, W ... endlich-dimensioneler Vektorraum über $\mathbb{R}$

V^*, W^* ... dualer Vektorraum

(V, ω) ... symplektischer Vektorraum (Def. 0.1)
ω ist eine nicht-entortete, antisymm. Bilinearform auf V

Bsp 1.1.: Gegeben sei ein bel. Vektorraum W. Dann hat $W \oplus W^*$ die kanonische symplektische Struktur: $\Omega_0(u \oplus f, v \oplus g) = g(u) - f(v)$.

(- antisymmetrisch ✓
- zu jedem Vektor $u \oplus f$ $\exists$ ein Vektor $v \oplus g$, sodass $\Omega_0(u \oplus f, v \oplus g) \neq 0$: setze $v \oplus g = 0 \oplus h$, wobei $h(u) \neq 0$. ✓)

Bem: Symplektische Vektorräume haben immer gerade Dimension (antisymm. Matrizen in ungeraden Dim. sind immer entartet).

Notation: $\dim V = 2n$.

1.1. Unterräume in symplektischen Vektorräumen

Def 1.2: Gegeben sei (V,ω) und $W \subset V$. Dann heißt

$$W^\omega = \{u \in V \mid \omega(u,v) = 0 \ \forall v \in W\}$$

das <u>ω-orthogonale</u> (oder <u>symplektische</u>) <u>Komplement</u> von W.

Prop. 1.3: Für $U, W \subset V$ und W^ω gilt:

(a) $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$

(b) $W^{\omega\omega} = W$.

(c) $U \subset W \iff W^\omega \subset U^\omega$

Bew. 1.3: (a) Betrachte die Abbildung $\omega^\flat : V \to V^*$, die definiert ist durch: $\omega^\flat(v)(u) := \omega(v,u)$, $\forall u \in V$.
Da ω nicht-entartet ist, ist $\omega^\flat$ ein Isomorphismus.

Für alle $u \in W$ gilt

$$\omega^\flat(v)(u) = \omega(v,u) = 0$$

$\Rightarrow \quad \omega^\flat(v) \in \mathrm{Ann}(W) \ldots$ Annultator von W

$$\left(\begin{array}{c} \| \\ N^*(W) \ldots \text{Konormalraum von } W \\ \cap \\ V^* \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \mathrm{Ann}(W) \simeq W^\omega$

und $\quad \dim W + \dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V$.

(b) folgt aus der Anti-symmetrie von ω

(c) "$\Rightarrow$": $u \in U$, $v \in W^\omega \Rightarrow \omega(u,v) = 0 = -\omega(v,u) \Rightarrow v \in U^\omega$

"$\Leftarrow$": analog $\quad \square$

Diese Eigenschaften werden mit symm., nicht-entart. Bilinearformen geteilt.

__Aber__: Anders als bei symmetrischen, nicht-entart. Bilinearformen muss $W \cap W^\omega = \{0\}$ __nicht__ gelten.

Zum Beispiel: W sei der 1-dimensionale Unterraum der durch den Vektor $u \in V$ aufgespannt wird, dann ist $u \in W^\omega \Rightarrow W \subset W^\omega$.

Def 1.4: Gegeben sei (V,ω) und $W \subset V$, dann heißt W

__isotrop__ falls $W \subseteq W^\omega$,

__koisotrop__ falls $W^\omega \subseteq W$,

__Lagrange__ falls $W^\omega = W$,

symplektisch falls $W^\omega \cap W = \{0\}$.

Satz 1.5: Für (V,ω), $\dim V = 2n$, und $W \subset V$ gilt:

(a) W ist isotrop $\Leftrightarrow \omega|_W = 0 \quad \Rightarrow \dim W \leq n$,

(b) W ist koisotrop $\Leftrightarrow \omega|_{W^\omega} = 0 \quad \Rightarrow \dim W \geq n$,

(c) W ist Lagrange $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega|_W = 0 \\ \text{und} \\ \omega|_{W^\omega} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim W = n$

(d) W ist symplektisch $\Leftrightarrow \omega|_W$ ist nicht-entartet $\Rightarrow$ $\dim W$ gerade

(e) W ist isotrop $\Leftrightarrow W^\omega$ ist koisotrop

Bew. 1.5: (a) "$\Rightarrow$" $\forall u,v \in W$ gilt $u,v \in W^\omega$

$\Rightarrow \omega(u,v) = 0$

"$\Leftarrow$" falls $\exists u,v \in W$, sodass $\omega(u,v) \neq 0$, denn ist $u,v \notin W^\omega \Rightarrow W \nsubseteq W^\omega$

"$\Rightarrow_2$": $W \subseteq W^\omega \Rightarrow \dim W \leq \dim W^\omega = \dim V - \dim W$

$$\Rightarrow \dim W \leq \frac{\dim V}{2} = n$$

(e) folgt aus Def. und Prop. 1.3.

(b) kombiniere (a) & (e)

(c) folgt aus (a), (b)

(d) "$\Rightarrow$": Wenn $v \in W$, dann $\exists u \in W$ sodass $\omega(u,v) \neq 0$,

denn wäre $\omega(u,v) = 0 \ \forall u \in W \Rightarrow v \in W^\omega$ ↯

"$\Leftarrow$": $\forall u \in W \ \exists v \in W$, sodass $\omega(u,v) \neq 0$ ist und

damit ist $u \notin W^\omega$

$\Rightarrow W \cap W^\omega = \{0\}$

□

Aus einem koisotropen Unterraum $W \subset V$ kann ein symplektischer Vektorraum konstruiert werden, indem man den ω-orthogonalen Unterraum W^ω austeilt. Dieser Prozess heißt:

Lineare Symplektische Reduktion:

Prop. 1.6: Gegeben (V,ω) und $W \subset V$ koisotrop. Dann ist $\tilde{V} = W/W^\omega$ symplektisch mit der induzierten symplektischen Struktur $\tilde{\omega}$ von ω.

Wenn $L \subset V$ ein Lagranger Unterraum ist, so ist $\tilde{L} = (L \cap W + W^\omega)/W^\omega$ ebenfalls Lagrange.

Bew 1.6: Es sei $[u] = u + W^\omega \in \tilde{V}$ mit $u \in W$.

$$\forall u,v \in W: \omega(u + W^\omega, v + W^\omega) = \omega(u,v) + \omega(u, W^\omega) + \omega(W^\omega, v) + \omega(W^\omega, W^\omega) = \omega(u,v)$$

Die Bilinearform auf W hängt nicht vom Repräsentanten in der Äquivalenzklasse ab.

$\Rightarrow$ induzierte anti-symmetrische Bilinearform $\tilde{\omega}$.

Zu zeigen: $\tilde{\omega}$ ist nicht-entartet:

Wenn $u \in W$ und $\omega(u,v) = 0 \ \forall v \in W \Rightarrow$

$u \in W^{\omega} \Rightarrow [u] = 0 \Rightarrow \tilde{\omega}$ ist nicht-entartet. $\square$

Übungsaufgabe 4: Beweise den zweiten Teil (Lagrange Unterräume) von Prop 1.6.

Übungsaufgabe 5: Gegeben sei (V, ω) und $W \subset V$ koisotrop. Bestimme den Rang von $\omega|_W$.

1.2. Symplektische Basis

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines symplektischen Vektorraums ist die Tatsache, dass er immer in Standardform $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ (Def 0.11) gebracht werden kann:

Satz (Def.) 1.7: Gegeben (V,ω) mit $\dim V = 2n$.
Dann existiert eine Basis $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots b_n)$, sodass $\forall\, i,j = 1,\dots,n$ gilt:

$$\omega(a_i,b_j) = \delta_{ij} \quad ,$$

$$\omega(a_i,a_j) = 0 \quad , \quad \omega(b_i,b_j) = 0 \quad .$$

So eine Basis heißt <u>symplektische Basis</u> (oder <u>Standardbasis</u>).
Weiters existiert ein Vektorraumisomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V$, sodass $\Phi^*\omega = \omega_0$.

Notation 1.8: Für einen Vektorraumhomomorphismus $\Phi : V_1 \to V_2$ führen wir den "<u>pull-back</u>" ein:

$$\forall\, u,v \in V_1 \; : \; \Phi^*\omega_2(u,v) := \omega_2(\Phi u, \Phi v).$$

Bem: Eine symplektische Basis ist <u>nicht</u> eindeutig!

Bew. 1.7: Wir wählen einen beliebigen Vektor $a_1 \in V$. Da ω nicht-entartet ist, existiert ein geignet normierter Vektor b_1

($\neq a_1$, da ω anti-symm.) mit $\underline{\omega(a_1, b_1) = 1}$.

Wir setzen $W_1 = \operatorname{span}\{a_1, b_1\} \subset V$. W_1 ist offensichtlich symplektisch.

$V_{2n-2} := W_1^{\omega}$ ist ebenfalls symplektisch und $\dim W_1^{\omega} = 2n-2$,

Nun wird dieser Prozess iterativ wiederholt:

für $m = 2, \dots, n$:

Vektoren $a_m, b_m \in V_{2n-2m+2}$ mit $\underline{\omega(a_m, b_m) = 1}$

und $W_m = \operatorname{span}\{a_m, b_m\} \subset V_{2n-2m+2}$

$$V_{2n-2m} := W_m^{\omega}$$

bis bei $m=n$: $V_0 := W_n^{\omega} = \{\emptyset\}$.

Der Isomorphismus Ψ läßt sich konstruieren mit:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow V \\ x = (q_1 \dots q_n, p_1, \dots p_n) &\longmapsto \sum_{m=1}^{n} (q_m a_m + p_m b_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^* \omega(x, x') &= \omega\Big(\sum_m (q_m a_m + p_m b_m), \sum_k (q_k' a_k + p_k' b_k)\Big) = \\ &= \sum_{m,k} q_m p_k' \omega(a_m, b_k) + \sum_{m,k} p_m q_k' \omega(b_m, a_k) \\ &= \sum_{m,k} (q_m p_k' - p_m q_k') \delta_{mk} = \\ &= \omega_0(x, x') \quad \square \end{aligned}$$

Kor. 1.9: Gegeben sei eine glatte, 1-parameterige Familie von symplektischen Strukturen ω_t auf V. Dann existiert eine glatte Familie von Isomorphismen $\Phi_t : \mathbb{R}^{2n} \to V$ mit $\Phi_t^* \omega_t = \omega_0$.

Bew 1.9: Dass $\forall t$, Φ_t existiert, ist klar von Satz 1.7. Die Glattheit folgt aus der Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens (für anti-symm. Bilinearformen). $\square$

Übungsaufgabe 6: Gegeben sei ein reeller Vektorraum V und eine anti-symm. Bilinearform β. Zeige, dass eine Basis $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots c_k)$ existiert, sodass

$\beta(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, $\forall i,j = 1, \dots, n$, und sonst verschwindet.

Übungsaufgabe 7: Gegeben (V, ω), und $W \subset V$ sei ein isotroper, koisotroper, Lagranger oder symplektischer Unterraum. Zeige, dass eine Standardbasis auf W (siehe Übungsaufgabe 6) immer zu einer Standardbasis auf V erweitert werden kann.

Übungsaufgabe 8: Zeige, dass ein (Kodim.= 1) Unterraum von (V, ω) immer koisotrop ist.

Übungsaufgabe 9: Finde einen Unterraum W in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ der weder isotrop, koisotrop noch symplektisch ist. In welchen Dimensionen ist das möglich?

1.3. Äußere Algebren, Volumenform

Gegeben sei ein reeller Vektorraum W und

$$T^k W = \underbrace{W \otimes \ldots \otimes W}_{k \text{ mal}}$$

das k-te Tensorprodukt von V. Die direkte Summe

$$T^\circ W = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k W, \qquad T^0 W := \mathbb{R},$$

heißt Tensoralgebra (mit $\otimes$ als Produkt, ...).

Weiters sei

$$J^k W = \{ v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \in T^k W \mid \exists i, j = 1, \ldots, k : v_i = v_j \}.$$

Dann ist $J^\circ W = \bigoplus_{k=2}^{\infty} J^k W$ ein Ideal in TW.

Def 1.10: Der Vektorraumquotient

$$\Lambda^k W := T^k W / J^k W$$

heißt k-te äußere Potenz von W, und

$$\Lambda^\bullet W := T^\bullet W / J^\bullet W = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k W$$

ist die äußere Algebra mit dem induzierten Produkt: für $x, y \in \Lambda^\bullet W$:

$$x \wedge y = x \otimes y \mod J^\bullet W.$$

Dieses Produkt wird äußeres Produkt oder Wedgeprodukt genannt.

Falls $x \in \Lambda^k W$, dann wird mit $|x| := k$ der Grad von x bezeichnet.

Bem 1.11: Gegeben sei eine Basis $(v_1, \dots, v_m)$ von W, $\dim W = m$.

(a) Das Wedgeprodukt ist graduiert anti-symmetrisch

$$x \wedge y = (-1)^{|x||y|} y \wedge x.$$

Im Speziellen gilt:

$$v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i$$

(b) $\{ v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k,\ i_\ell = 1, \dots, m \}$ bilden eine Basis von $\Lambda^k W$.

(c) Die Dimension von $\Lambda^k W$ ist

$$\dim \Lambda^k W = \binom{m}{k},\ k = 1, \dots, n, \quad \dim \Lambda^k W = 0 \text{ sonst.}$$

Def 1.12: Eine Abbildung $\alpha : \underbrace{W \times \ldots \times W}_{k \text{ mal}} \to \mathbb{R}$,
linear in allen Argumenten, und mit der Eigenschaft ($\dim W = m$)

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0 \quad \text{falls } \exists\, i, j = 1, \ldots, m : v_i = v_j$$

heißt (alternierende) lineare k-Form.

Bem 1.13: (a) Der Raum der linearen k-Formen ist genau die äußere Potenz $\Lambda^k W^*$ des Dualraums von W.

$(v_1, \ldots, v_m)$ sei eine Basis von W.

$(v_1^*, \ldots, v_m^*)$ sei die duale Basis für W^* $(v_i^*(v_j) = \delta_{ij})$

Sei $\alpha = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} v_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge v_{i_k}^* \in \Lambda^k W^*$.

α induziert eine lineare k-Form wie folgt:

$$\alpha(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) :=$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(i_1)}^*(v_{j_1}) \cdots v_{\sigma(i_k)}^*(v_{j_k}) =$$

$$= \alpha_{j_1 \ldots j_k}$$

(b) Die symplektische Struktur ω ist eine alternierende 2-Linearform, d.h ein Element in $\Lambda^2 V$. In einer Basis $(v_1, \dots, v_{2n})$ von V:

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$$

In der Standardbasis $(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n)$ von V gilt:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \wedge b_i^* .$$

$$\omega(a_i, b_j) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^*(a_i)\, b_k^*(b_j) - b_k^*(a_i)\, a_k^*(b_j) \right)$$

$$= \delta_{ij} = -\omega(b_j, a_i)$$

(c) Alternierende Linearformen maximalen Grades, $k = \dim W = m$ bilden einen 1-dim. Vektorraum $\Lambda^m W^*$. Die Elemente $(\neq 0)$ in $\Lambda^m W^*$ werden Volumenform auf W genannt.

Prop 1.14: Gegeben sei (V, ω).

$$\mathrm{vol}_\omega := \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} = \frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

ist eine <u>Volumenform auf V</u> genau dann, wenn ω nicht-entartet ist.

Bew 1.14: $vol_\omega \in \Lambda^{2n} V^*$ ist trivial.

zu zeigen: $vol_\omega \neq 0 \iff \omega$ nicht-entartet

"$\Leftarrow$":

Wähle eine Standardbasis: $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \wedge b_i^*$.

$$vol_\omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} = a_1^* \wedge b_1^* \wedge \ldots \wedge a_n^* \wedge b_n^* \neq 0$$

"$\Rightarrow$": angenommen ω sei entartet, dann $\exists$ Standardbasis mit $\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i^* \wedge b_i^*$ für $\underline{m < n}$!

$\Rightarrow \omega^{\wedge m} \propto a_1^* \wedge b_1^* \wedge \ldots \wedge a_m^* \wedge b_m^*$

$\Rightarrow \omega^{\wedge m} \wedge \omega = 0 \Rightarrow vol_\omega = 0$ $\square$

1.4. Lineare Symplektische Gruppe

Def 1.15: (V_1, ω_1) und (V_2, ω_2) seien symplektische Vektorräume. Ein <u>linearer Symplektomorphismus</u> (oder eine <u>lineare symplektische Transformation</u>) ist ein linearer Isomorphismus $\Psi: V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$, sodass $\Psi^* \omega_2 = \omega_1$.

Falls so ein Ψ existiert, heißen (V_1, ω_1) und (V_2, ω_2) <u>symplektomorph.</u>

Kor. 1.16: Alle symplektischen Vektorräume gleicher Dimension sind symplektomorph.

Bew. 1.16: folgt unmittelbar aus Satz 1.7. $\square$

Bem.: Von nun an wird der Begriff Symplektomorphismus für <u>einen</u> Vektorraum verwendet.

$$\Psi \in Sp(V, \omega) \quad \Leftrightarrow \quad \Psi: V \xrightarrow{\cong} V \text{ mit } \Psi^* \omega = \omega$$

$Sp(2n) := Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist die <u>Gruppe</u> der Symplektomorphismen auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Falls V und $\mathbb{R}^{2n}$ symplektomorph $\Rightarrow Sp(2n) \cong Sp(V, \omega)$

Der folgende Satz sagt, dass Symplektomorphismen auf (V,ω) "das selbe" sind, wie Lagrange Unterräume auf $V \oplus V$. Dieser Satz manifestiert die spezielle Rolle von Lagrangen Unterräumen in der symplektischen Geometrie.

Satz. 1.17: Gegeben (V,ω) und eine lineare Abb. $\Psi : V \to V$. $\Psi \in Sp(V,\omega)$ genau dann, wenn der Graph

$$\Gamma_\Psi = \{ (v, \Psi v) \in V \oplus V \mid v \in V \}$$

ein Lagranger Unterraum von

$$(V \oplus V \ , \ \Omega = \omega \times (-\omega))$$

ist.

Bew 1.17: $\forall v, u \in V$: $\Omega\big((v, \Psi v), (u, \Psi u)\big) =$

$$= \omega(v,u) + (-\omega)(\Psi v, \Psi u) =$$

$$= \omega(v,u) - \Psi^* \omega(v,u) \qquad \square$$

Satz 1.18: Symplektische Transformationen auf (V,ω) erhalten das Volumen.

Bew. 1.18: Eine Volumenform vol kann immer geschrieben werden als $\quad vol = c \cdot vol_\omega = c \cdot \frac{\omega^{\wedge n}}{n!}$, wobei

$c \neq 0$ eine geeignete Konstante ist. Nun gilt für $\Phi \in Sp(V,\omega)$:

$$\Phi^* vol = c \cdot \Phi^* vol_\omega = c \cdot \frac{(\Phi^*\omega)^{\wedge n}}{n!} = c\,\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} =$$

$$= vol \quad \square$$

Kor. 1.19: $\Phi \in Sp(2n) \Rightarrow \det \Phi = 1$.

Bew 1.19: Wir wählen eine Standardbasis

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n a_i^* \wedge b_i^*,$$

$vol_{\omega_0} = a_1^* \wedge b_1^* \wedge \ldots \wedge a_n^* \wedge b_n^*$. Dann gilt für $\Phi \in GL(2n, \mathbb{R})$ (invertierbare $2n \times 2n$-Matrizen)

$$\Phi^* vol_{\omega_0} = \det \Phi \cdot vol_{\omega_0}.$$

Aus Satz 1.18 folgt daher, dass $\det \Phi = 1$ falls $\Phi \in Sp(2n)$. $\square$

Bem. 1.20: Die Gruppe der Volumen erhaltenden Isomorphismen sind die <u>speziellen linearen Transformationen</u>: $SL(m,\mathbb{R}) = \{\Phi \in GL(m,\mathbb{R}) \mid \det \Phi = 1\}$.

Kor 1.21: $Sp(2n) \subset SL(2n,\mathbb{R})$, für $n>1$,

$$Sp(2) = SL(2,\mathbb{R}).$$

Lemma 1.22: In der Standardbasis ist eine Matrix $\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2n,\mathbb{R})$ genau dann symplektisch, wenn

$$A^T D - C^T B = \mathbb{1}_n,$$
$$A^T C - C^T A = 0,$$
$$B^T D - D^T B = 0.$$

Bew 1.22: Einsetzen in $\Phi^T \omega_0 \Phi = \omega_0$. $\square$

Mit dem bisher Eingeführten kann der Raum der symplektischen Strukturen auf einem Vektorraum V beschrieben werden:

Satz (Def) 1.23: Sei $\Omega(V)$ die Menge aller symplektischen Strukturen auf V, $\dim V = 2n$. Dann gilt:

$$\Omega(V) \cong GL(2n,\mathbb{R}) / Sp(2n,\mathbb{R}).$$

Bew. 1.23: Betrachte die Wirkung von $GL(2n,\mathbb{R})$ auf $\Omega(V)$:

$$GL(2n,\mathbb{R}) \times \Omega(V) \longrightarrow \Omega(V),$$
$$(\Phi, \omega) \longmapsto \Phi^*\omega.$$

Nach Satz 1.7 bzw. Kor. 1.16 ist diese Wirkung transitiv, d.h. $\forall \omega \in \Omega(V)$ gilt:

$$\left(GL(2n,\mathbb{R})\right)^*\omega = \Omega(V).$$

Fixiere eine symplektische Struktur, z.B. ω_0:

nicht Normalteiler — surjektiv — keine Gruppe

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & Sp(2n) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & GL(2n,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\pi} & \Omega(V) \\ & & & & \Phi & \longmapsto & \Phi^*\omega_0 \end{array}$$

Es gilt $\iota(Sp(2n)) = \pi^{-1}(\omega_0)$, und daher folgt die Behauptung. Beachte, dass die Äquivalenzklassen als $\Phi \cong \Psi\Phi$ def. sind, für $\Phi \in GL(2n,\mathbb{R})$ und $\Psi \in Sp(2n)$, d.h. $Sp(2n)$ wirkt von links auf $GL(2n,\mathbb{R})$. $\square$

Übungsaufgabe 10: Gegeben eine antisymmetrische Matrix $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, v_i^* \wedge v_j^*$. Die Pfaffsche Determinante von ω ist definiert als

$$\frac{1}{n!}\omega^{\wedge n} =: \mathrm{Pf}(\omega)\, v_1^* \wedge \dots \wedge v_{2n}^*.$$

Zeige, dass $\mathrm{Pf}(\omega)^2 = \det\omega$! (Hinweis: $\exists\, \Psi: \omega = \Psi^T \omega_0 \Psi$.)