1.5. Kompatible komplexe Strukturen

Def 1.23: Gegeben sei ein reeller Vektorraum W. Eine <u>komplexe Struktur</u> auf W ist eine lineare Abbildung $J: W \to W$ mit der Eigenschaft

$$J^2 = -\mathbb{1}.$$

Das Paar (W, J) wird <u>komplexer Vektorraum</u> genannt.

Bem.: (a) $J^{-1} = -J$

(b) Alle Eigenwerte von J sind $+i$ oder $-i$.

Da J reell ist, sind $i, -i$ immer gepaart.

$\Rightarrow \dim W = 2n$ ist gerade.

(c) Durch geeignete Wahl der Basis, d.h. bestehend aus den Eigenvektoren von J, kann W (über $\mathbb{C}$) diagonalisiert werden:

$$\mathbb{C}^{2n} \cong W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = W_+ \oplus W_- \,, \quad EW(W_\pm) = \pm i.$$

und $W_+ \cong \mathbb{C}^n$, $\quad W_- = \overline{W_+}$ komplexe Konj. $(W, J) \to (W, -J)$

Das rechtfertigt den Namen "komplexer Vektorraum" für (W, J).

(d) $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ heißt komplexe Standardstruktur.

Satz 1.24: Gegeben sei ein komplexer Vektorraum (W, J), $\dim W = 2n$.
Dann existiert ein Isomorphismus
$\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to W$, sodass

$$J \Phi = \Phi J_0 .$$

Bew 1.24: Wähle eine Basis für W_+:

$$e_i = a_i - i b_i \,, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann bilden $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n$ eine Basis von W
mit $\quad J a_i = b_i \,, \quad J b_i = -a_i$.

Der Isomorphismus ist dann

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (x_i a_i + y_i b_i) \quad \square$$

Def 1.24 Eine komplexe und eine symplektische Struktur, J und ω, auf V heißen <u>kompatibel</u>, falls

$$g_J(u,v) := \omega(u, Jv), \quad \forall u,v \in V,$$

ein positiv-definites Skalarprodukt (d.h. symm. Bilinearform) ist.

Bem.: J_0 und ω_0 sind kompatibel, und $g_0 = g_{J_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Euklidische Skalarprodukt.

Satz 1.25 Gegeben (V, ω), dann existiert eine kompatible komplexe Struktur J auf V.

Bew. 1.25: ① Wähle ein positiv-def. Skalarprodukt

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \quad (\text{existiert immer}).$$

g und ω induzieren Isomorphismen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\omega", "\cong"'] \arrow[rr, bend right, "A = g^{-1} \circ \omega"'] & V^* & V \arrow[l, "g"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

$$\omega(u,v) = g(Au, v)$$

- A ist anti-symmetrisch:

$$g(A^T u, v) = g(u, Av) = \omega(v, u)$$

$$= -\omega(u, v) = -g(Au, v)$$

$$\Rightarrow A^T = -A$$ (wenn g Euklidisch: dann ist $(\ldots)^T$ die Transposition von Matrizen)

- $(AA^T)^T = AA^T (= -A^2)$ ... symmetrisch

- $g(AA^T u, u) = g(A^T u, A^T u) > 0 \quad \forall u \neq 0$

$$\Rightarrow AA^T = B \,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})\, B^{-1}, \quad \lambda_i > 0$$

Eigenwerte sind gepaart: Es sei $(AA^T) v_i = \lambda_i v_i$

$$\Rightarrow (AA^T)(Av_i) = A(AA^T)v_i = \lambda_i (Av_i)$$

$$(A^2 v_i) = -\lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow AA^T = B \,\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu_n)\, B^{-1} \quad (*)$$

(2) definiere $\sqrt{AA^T} = B \,\mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n})\, B^{-1}$

$\Rightarrow \sqrt{AA^T}$ ist wieder symmetrisch und positiv.

$J := (\sqrt{AA^T})^{-1} A$ (<u>Polaraufspaltung</u> von A)

ist (a) eine <u>komplexe Struktur</u>:

zunächst: $A\sqrt{AA^T} = \sqrt{AA^T} A$ wegen $(*)$

$$J^2 = (\sqrt{AA^T})^{-1} A \, (\sqrt{AA^T})^{-1} A = (\sqrt{AA^T})^{-2} A^2 =$$

$$= (AA^T)^{-1} A^2 = -(A^2)^{-1} A^2 = -\mathbb{1}$$

und (b) <u>kompatibel</u> mit ω:

$$g_J(u,v) := \omega(u, Jv) = g(Au, A(\sqrt{AA^T})^{-1} v) =$$

$$= g(u, \sqrt{AA^T}\, v) = g((\sqrt{AA^T})\, v, u) \underset{\sqrt{AA^T} \text{ symmetr.}}{=}$$

$$= g(v, (\sqrt{AA^T})\, u) = g_J(v,u)$$

für die Basis $v_1 \dots v_{2n}$, die AA^T diagonalisiert, gilt:

$$g_J(v_i, v_i) = g(v_i, \sqrt{AA^T}\, v_i) = \sqrt{\lambda_i}\, g(v_i, v_i) > 0$$

$\Rightarrow$ positiv definit $\square$

Bem: (a) Wenn g gegeben ist, dann ist diese Konstruktion von J kanonisch.

(b) aber: $g_J \neq g$!

Def 1.26: $\mathcal{J}(V,\omega)$ sei die Menge der kompatiblen komplexen Strukturen auf (V,ω).

Im Folgenden wollen wir $\mathcal{J}(V,\omega) \cong \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ bestimmen. Dafür ist folgendes Lemma nützlich:

Lemma 1.27:

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) = U(n)$$

Bem 1.28: (i) $O(2n) = \{ \Phi \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid \Phi^T \Phi = \mathbb{1} \}$

(ii) $GL(n,\mathbb{C}) = \{ \Phi \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid \Phi J_0 = J_0 \Phi \}$

(iii) $Sp(2n) = \{ \Phi \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid \Phi^T \omega_0 \Phi = \omega_0 \}$

(iv) $U(n) = \{ U = X + iY \mid X, Y \in GL(n,\mathbb{R}),\ \underset{\substack{\uparrow \\ U^+ = (U^*)^T}}{U^+ U} = \mathbb{1} \}$

$$U^+ U = \mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{cases} X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}, \\ X^T Y = Y^T X. \end{cases}$$

Bew 1.27: Zwei der definierenden Gleichungen (i)–(iii) implizieren die dritte.
$\Rightarrow$ Die ersten beiden Gleichungen in der Behauptung sind gezeigt.

Nach Lemma 1.22 gilt in der Standardbasis:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n) \Leftrightarrow \begin{cases} A^T D - C^T B = \mathbb{1} \\ A^T C - C^T A = 0 \\ B^T D - D^T B = 0 \end{cases}$$

$$\Phi \in Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}): \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = D, \quad B = -C$$

$$\Rightarrow \quad \Phi \in Sp(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}) \Leftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$$

$$X^T Y = Y^T X$$

$$\underset{(iv)}{\Leftrightarrow} \quad U = X + iY \in U(n) \quad \square$$

Lemma 1.27 zeigt insbesondere, dass $U(n)$ eine Untergruppe von $Sp(2n)$ ist. Tatsächlich gilt:

Satz 1.29: Gegeben (V,ω) mit $\dim V = 2n$. Dann gilt:

$$\mathcal{J}(V,\omega) \cong Sp(2n) / U(n) .$$

zunächst zeigen wir:

Lemma 1.30: Die komplexe Struktur J ist genau dann kompatibel mit ω_0, wenn ein Symplektomorphismus $\Phi \in Sp(2n)$ existiert, sodass $\Phi J_0 = J \Phi$.

Bew. 1.30: $g_{J_0}(u,v) = \omega_0(u, J_0 v) = \omega_0(\Phi u, \Phi J_0 v)$

$= \omega_0(\Phi u, J \Phi v) = g_J(\Phi u, \Phi v)$

$\Rightarrow g_J$ ist symmetrisch, positiv $\square$

Bew. 1.29: Wir arbeiten in der Standardbasis $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, und betrachten die Wirkung von $Sp(2n)$ auf $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$:

$$\begin{aligned} Sp(2n) \times \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) &\longrightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \\ (\Phi, J) &\longmapsto \Phi J \Phi^{-1} \end{aligned}$$

Diese Wirkung ist transitiv wegen 1.30.

$U(n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C})$ läßt die kompexe Struktur unverändert: $\Phi J = J \Phi$ für $\Phi \in U(n)$:

$$1 \to U(n) \xhookrightarrow{\iota} Sp(2n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$$
$$\Phi \longrightarrow \Phi^{-1} J_0 \Phi$$

$\pi^{-1}(J_0) = \iota(U(n))$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt $\square$

Übungsaufgabe 11: Gegeben (V,ω) und eine komplexe Struktur J auf V. Zeige:

$$J \text{ ist kompatibel mit } \omega \Longleftrightarrow \begin{cases} \circ\ \omega(Ju, Jv) = \omega(u,v),\ \forall u,v\in V \\ \quad \text{d.h. } J \in Sp(V,\omega) \\ \circ\ \omega(u, Ju) > 0,\ \forall u \in V \\ \quad J \text{ ist } (\omega\text{-}) \underline{\text{zahm}} \end{cases}$$

Übungsaufgabe 12: Gegeben sei ein kompatibles Tripel (ω, J, g_J) auf V. Zeige folgende Relationen: $\forall u,v\in V$:

(1) $\omega(u,v) = g_J(Ju, v)$,

(2) $g_J(Ju, Jv) = g_J(u,v)$,

(3) $|\omega(u,v)|^2 \leq |u|^2 |v|^2$, wobei $|u|^2 := g_J(u,u)$.

Übungsaufgabe 13: (ω, J, g_J) seien ein kompatibles Tripel. Die Basis $v_1, \dots, v_{2n}$ von V sei so gewählt, dass für $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$ gilt, dass $Pf(\omega) > 0$. Zeige, dass

$$vol_\omega = \frac{1}{n!}\,\omega^{\wedge n} = \sqrt{\det g_J}\; v_1^* \wedge \dots \wedge v_{2n}^* .$$

1.6. Lagrange Unterräume

Def 1.31: $\mathcal{L}(V,\omega)$ bezeichne die Menge der Lagrangen Unterräume in (V,ω) und $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.

Im Folgenden wird $\mathcal{L}(n)$ beschrieben.

Lemma 1.32: Betrachte $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ und eine Abb.

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

wobei Z maximalen Rang hat.

(i) $\Lambda := \text{Bild}(Z)$ ist genau dann ein Lagranger Unterraum, $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$, wenn $X^T Y = Y^T X$.

(ii) Die Spaltenvektoren von Z bilden genau dann eine Orthonormalbasis von $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$, wenn $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$ (d.h. $U = X + iY \in U(n)$).

Bew 1.32: (i) $u, v \in \mathbb{R}^n$: $\omega_0(Zu, Zv) = \omega_0(Xu + Yu, Xv + Yv)$

$$= \omega_0(Yu, Xv) + \omega_0(Xu, Yv) =$$

$$= u^T Y^T X v - u^T X^T Y v .$$

(ii) trivial, bzgl. $g_{J_0} = \mathbb{1}$. $\square$

Satz 1.33: Für jedes Paar Lagranger Unterräumen $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}(n)$ existiert eine lin. symplektische Transformation $\Phi \in U(n) = Sp(2n) \cap O(n)$, sodass $\Lambda' = \Phi \Lambda$.

Weiters gilt:

$$\mathcal{L}(n) \cong U(n) / O(n) .$$

Bew. 1.33: Betrachte einen Lagrangen Unterraum $\Lambda = \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$ mit Orthonormalbasis (1.32(ii)), dann ist $\Phi = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in U(n)$ und

$$\Lambda = \Phi \Lambda_{hor} \quad \text{für} \quad \Lambda_{hor} = \text{Bild}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Damit folgt die erste Behauptung.

Φ bestimmt Λ eindeutig bis auf einen Wechsel der Orthonormalbasis $\Rightarrow \mathcal{L}(n) \cong U(n) / O(n)$.

Übungsaufgabe 14: Gegeben sei das kompatible Tripel in Standardform, $(V, \omega_0, J_0, g_0 = \langle , \rangle)$. Zeige, dass das orthog. Komplement (bzgl. g_0) eines Lagrangen Unterraumes Λ gegeben ist durch $\Lambda^\perp = J_0 \Lambda$. Sei $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis von Λ. Zeige, dass $(a_i, J_0 a_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Standardbasis von V ist.

1.7. Gromov's non-squeezing theorem

Hier betrachten wir nur die affine Version:

Def 1.34: Ein affiner Symplektomorphismus auf (V,ω) ist eine Abb. $\psi: V \to V$,

$$\psi(x) = \Psi(x) + \tilde{x},$$

wobei $\Psi \in Sp(V,\omega)$ und $\tilde{x} \in V$.

Im Folgenden sei $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, J_0, g_0)$ das kompatible Tripel in Standard form, z.B: $g_0(u,v) = \langle u,v \rangle$ ist das Euklidische Skalarprodukt, $|u|^2 := \langle u,u \rangle$.

Weiters sei $B^{2n}(r)$ der Ball mit Radius r und

$Z^{2n}(R) = B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ (mit $B^2(R) = \{ |q_1|^2 + |p_1|^2 < R \}$)

der symplektische Zylinder.

Satz 1.35 (Gromov's affine non-squeezing thm.)
ψ sei eine affine symplektische Transformation auf $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, sodass $\psi(B^{2n}(r)) \subset Z^{2n}(R)$. Dann ist $r \leq R$.

Bew 1.35: $(a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n)$ seien die Vektoren der Standardbasis mit Koord. $(q_1, \dots, q_n, p_1 \dots p_n)$.

Für $\varphi(x) = \Psi(x) + \tilde{x}$ gilt laut Voraussetzung

$$\sup_{x \in B^{2n}(r)} \left[\langle a_1, \varphi(x) \rangle^2 + \langle b_1, \varphi(x) \rangle^2 \right] \leq R^2 \quad (*)$$

$$\|$$

$$\sup_{x \in B^{2n}(r)} \Big[\big(\langle \underbrace{\Psi^T(a_1)}_{=: u}, x \rangle + \underbrace{\langle a_1, \tilde{x} \rangle}_{= \tilde{q}_1} \big)^2 + \big(\langle \underbrace{\Psi^T(b_1)}_{=: v}, x \rangle + \underbrace{\langle b_1, \tilde{x} \rangle}_{= \tilde{p}_1} \big)^2 \Big]$$

Nun gilt aber:

$$1 = \omega_0(a_1, b_1) = \omega_0(\Psi^T a_1, \Psi^T b_1) = \omega_0(u, v)$$

Weiters gilt:

$$\omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle \leq |J_0 u| |v| = |u| |v|$$

$$\Rightarrow |u| |v| \geq 1 \Rightarrow |u| \geq 1 \text{ oder } |v| \geq 1.$$

o.B.d.A.: Wähle $|u| \geq 1$ und setze

$$x = \pm \frac{r}{|u|} u \in B^{2n}(r), \quad (\pm) = \operatorname{sgn}(\tilde{q}_1).$$

$$\Rightarrow (\langle u, x \rangle + \tilde{q}_1)^2 = (\pm r |u| + \tilde{q}_1)^2 = (r|u| + |\tilde{q}_1|)^2 \geq r^2$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} r \leq R \qquad \square$$