2. Symplektische Mannigfaltigkeiten

Für die Definition einer symplektischen Mannigfaltigkeit wiederholen wir einige Begriffe der Differentialgeometrie. Dies dient auch der Einführung von Notation.

2.1. Mannigfaltigkeiten

Eine <u>m-dimensionale differenzierbare Mflk M</u> ist ein topologischer Raum, der lokal durch $\mathbb{R}^m$ modelliert wird, d.h. es existiert eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M ($\bigcup_\alpha U_\alpha = M$), in der jeder offenen Menge U_α ein Homöomorphismus $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V \subset \mathbb{R}^m$ zugeordnet ist, wobei V offen in $\mathbb{R}^m$ ist.

Für $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ist $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} = \chi_{\alpha\beta}$ on $U_\alpha \cap U_\beta$ eine C^∞-Abbildung.

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ heißt <u>Karte</u>. Ein Überdeckung von M durch Karten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, d.h. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, heißt <u>Atlas</u>.

Für jeden Punkt $p \in U_\alpha$ ist $\varphi_\alpha(p)$ durch ein

m-Tupel von <u>Koordinaten</u> $(x_1(p), \dots, x_m(p))$ gegeben.

$\chi_{\alpha\beta}$ sind die Koordinatenwechsel, im Folgenden oft durch $y(x)$ bezeichnet, wobei z.B. $y = (y_1, \dots y_m)$ die Koordinaten auf U_α und $x = (x_1, \dots x_m)$ die Koordinaten auf U_β sind.

Bem.: Annahme: der topologische Raum sei immer <u>Hausdorff</u> (d.h. unterschiedliche Punkte besitzen disjunkte offene Umgebungen) und <u>parakompakt</u> (d.h. $\exists$ eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$, sodass $\forall p \in M$: $p \in U_\alpha$ für endlich viele offene Mengen.

Gegeben zwei Mflk M und N. Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt <u>differenzierbar</u>, falls für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von M und (V_β, χ_β) von N, $\chi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ C^∞ sind.

(Wir schreiben: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{auf } V_j}}{y} = f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Koord. auf } U_i}}{x})$.)

Ein Homöomorphismus f (stetig und stetig invertierbar) heißt <u>Diffeomorphismus</u>, falls f und f^{-1} diff. sind.

Eine diff. Abb. $f: M \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbare <u>Funktion</u>, $f \in \mathcal{F}(M)$.

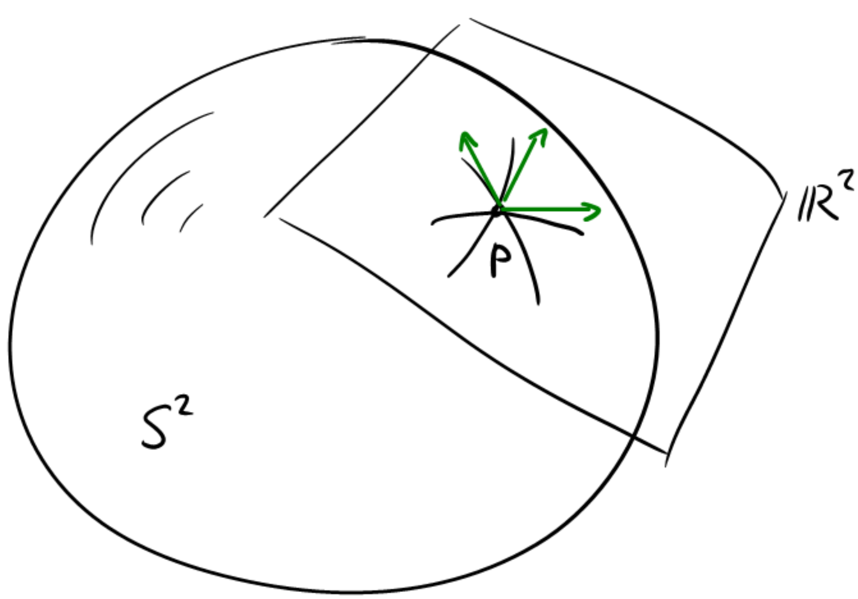
Eine diff. Abb. $\gamma: I \to M$, wobei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und heißt <u>Weg</u> mit Anfangs- und Endpunkt $\gamma(a) = p_0$ und $\gamma(b) = p_1$.

2.2. Tangential-, Kotangentialbündel

Gegeben ein Punkt $p \in M$. Was ist der Tangentialraum T_pM an diesem Punkt?

Für die Einbettung der Sphäre im $\mathbb{R}^3$, $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$:

$\boxed{\mathbb{R}^3}$



Die Tangentialvektoren entlang der Kurven durch p bilden den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Diese Konstruktion des Tangentialraumes ist unabhängig von der Einbettung:

Sei U eine offene Umgebung von p mit Koordinaten x.
Betrachte einen Weg $\gamma: I \longrightarrow U$, $x(s) = \varphi \circ \gamma(s)$ durch den Punkt p mit $p = \gamma(0)$.

Wir definieren den Tangentialvektor entlang γ bei p (in lokalen Koordinaten) durch $X^i(0) = \frac{dx^i}{ds}(0)$, $i = 1, \dots, m$.

Die Tangentialvektoren entlang aller Wege durch p bilden einen <u>m-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum T_pM.</u>

Die Basisvektoren in den lokalen Koordinaten x werden mit $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ bezeichnet; damit ist der Vektor $X_p = \sum_{i=1}^m X^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i}$ unabhängig vom Koordinatensystem:

$$X_p = \sum_{i=1}^m X^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^m X^i(0) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_j \tilde{X}^j(0) \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \tilde{X}^j$$

Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialvektorräume bilden das <u>Tangentialbündel</u> $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.
TM ist wieder eine Mfk.

Ein (Tangential-) Vektorfeld ist eine diff. Abbildung $X : M \to TM$, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X_p \in T_p M$ zuordnet. Vektorfelder bilden einen Vektorraum $\mathcal{X}(M)$.

Vektorfelder wirken in natürlicher Weise auf diff. Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, als Ableitungen:

$$X : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$f \longmapsto X(f) = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x)$$

- Leibnitzregel: $X(fg) = X(f)g + f X(g)$
- linear: $X(\lambda f) = \lambda X(f)$

Der duale Vektorraum zu $T_p M$ heißt Kotangentialraum $T_p^* M$. Die disjunkte Vereinigung $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ wird als Kotangentialbündel bezeichnet.

Für $f \in \mathcal{F}(M)$ ist das totale Differential $df_p \in T_p^* M$:

$$\langle df_p, X_p \rangle := X(f)_p = \sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Wegen $df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ ist es natürlich $(dx^1, \dots dx^m)$ als Basis von $T_p^* M$ in den Koordinaten x zu wählen. Ein allgemeines Element $\alpha_p \in T_p^* M$ hat die Form

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, dx^i \, .$$

Eine diff. Abb. $\alpha : M \to T^* M$, die jedem Punkt p einen Kotangentialvektor α_p zuordnet, wird <u>1-form</u> genannt, $\alpha \in \Gamma(T^* M)$.

Nun können die äußeren Potenzen $\Lambda^k T_p^* M$ (mit $\Lambda^0 T_p^* M = \mathbb{R}$) und $\Lambda^k T^* M = \bigcup_p \Lambda^k T_p^* M$ betrachtet werden.
Die Menge der diff. Abb. $\alpha : M \to \Lambda^k T^* M$ wird mit <u>$\Omega^k M$</u> bezeichnet, und α heißt <u>k-form</u>.

Bem: $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$

$\Omega^1(M) = \Gamma(T^* M)$

$\Omega^k(M)$ ... k-lineare Abb. auf $\Gamma(TM)$

Äußere Algebra auf $\Omega^\bullet(M)$ mit Wedgeprodukt

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) &\longrightarrow \Omega^{k+\ell}(M) \\ (\alpha \quad , \quad \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \quad \left(= (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha\right) \end{aligned}$$

$\Omega^k M$ ist ein (unendlich-dim.) Vektorraum über $\mathbb{R}$.

k-Form in lokalen Koordinaten:

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

total anti-symmetrisch

Die totale Ableitung einer Funktion df (für $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M)$) kann auf beliebige k-Formen erweitert werden, indem d "nur auf die Komponentenfunktion ($\alpha_{i_1 \dots i_k}(x)$) in lokalen Koordinaten wirkt", genauer:

Die <u>äußere Ableitung</u> (auch de Rham-Differential, Cartan-Ableitung) ist eine lineare Abbildung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, die in lokalen Koordinaten durch

$$d\alpha := \sum_{i_1 < \dots < i_k} (d\alpha_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$$

$$= \sum_{i,\, i_1 < \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha_{i_1 \dots i_k} \, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

definiert ist.

Tatsächlich ist d unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten und eindeutig bestimmt durch folgende Relationen:

Satz: Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ mit den Eigenschaften:

(Leibnitz) $\quad d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^{|\alpha_1|} \alpha_1 \wedge d\alpha_2,$

(nilpotent) $\quad d^2 = 0.$

df ist das totale Differenzial von $f \in \mathcal{F}(M)$

(obiges d erfüllt diese Eigenschaften)

z.B.: für $\alpha \in \Omega^k(M)$: (Multiindex $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$)

$$d^2\alpha = d\Big(\sum_{i,I} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^I\Big) =$$

$$= \sum_{j,i,I} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^j \partial x^i}\, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I = 0$$

Eine k-Form $\alpha \in \Omega^k M$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $d\alpha = 0$. Der Vektorraum aller geschlossenen k-Formen wird mit $\underline{Z^k M = \ker(d : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M)}$ bezeichnet.

$\alpha \in \Omega^k M$ heißt <u>exakt</u>, falls ein $\beta \in \Omega^{k-1} M$ existiert, sodass $\alpha = d\beta$. Der Vektorraum der exakten k-Formen wird mit $\underline{B^k M = \mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1} M \to \Omega^k M)}$ bezeichnet.

Wegen $d(d\beta)=0$ gilt: $B^k M \subseteq Z^k M$!

Bem.: Für $\alpha \in \Omega^1 \mathbb{R}^m$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i dx^i$ ist

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} \quad \forall i,j = 1,\dots,m$$

Integrebilitätsbedingung

In $\mathbb{R}^m$ folgt daraus: $\exists \beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$: $\alpha_i = \frac{\partial \beta}{\partial x^i}$,

d.h. α ist exakt, $\alpha = d\beta$.

Das gilt auf $\mathbb{R}^m$ für beliebige geschlossene k-Formen: $B^k \mathbb{R}^m = Z^k \mathbb{R}^m$

Für allg. Mflk ist dies nicht erfüllt!

Der Vektorraumquotient

$$H^k M := Z^k M / B^k M$$

heißt <u>deRham-Kohomologie</u> (Äquivalenzrelation $[\alpha] = [\alpha + d\beta]$, wobei $d\alpha = 0$).

Ein wichtiges Ergebnis aus der DG sagt, dass für M kompakt die <u>Betti-Zahlen</u> $b_k := \dim H^k M < \infty$ sind.

Gegeben zwei Mflk M und N, und eine differenzierbare Abbildung $f: M \to N$. Wie verhalten sich Vektorfelder, Formen und die äußere Ableitung bzgl. der Abbildung f?

Der "push-forward" eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine Abbildung $f_*: \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$,

$$f_* X(g) := X(g \circ f),$$

für alle $g: N \to \mathbb{R}$. In lokalen Koordinaten x und y auf $U \subset M$ und $V \subset N$ sei $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dann ist

$$f_* X = \sum_{j=1}^{m} \hat{X}^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Der "pull-back" einer k-Form $\omega \in \Omega^k(N)$ ist eine Abbildung $f^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$,

$$f^*\omega(X_1, \ldots, X_k) := \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_k)$$

für alle $X_j \in \mathfrak{X}(M)$. In lokalen Koordinaten gilt:

$$f^*\omega = \sum_{i,j} \omega_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Das deRham-Differential vertauscht mit dem pull-back:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \Omega^{k+1}(M) \\
\Omega^k(N) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(N) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

2.3. Symplektische Mannigfaltigkeiten

Def 2.1.: Eine symplektische Struktur auf einer diff. Mflk M ist eine geschlossene, nicht-entartete 2-Form ω. Das Paar (M, ω) heißt symplektische Mannigfaltigkeit.

Bem: nicht-entartet: für alle $p \in M$ ist $\omega_p \in \Lambda^2 T_p^* M$ nicht-entartet

Beispiel 2.2.: $\mathbb{R}^{2n}$ mit symplektischer Standardstruktur

$$\omega_{std} = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

ist eine symplektische Mflk. Aber auch

$$\omega = \sum_{i<j=1}^{2n} \omega_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$$

$(x = (q,p))$ ist eine symplektische Struktur.

Beispiel 2.3.: Eine lineare, injektive Abbildung $\Lambda : \mathbb{Z}^{2n} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definiert ein Gitter in $\mathbb{R}^{2n}$. Der Quotient $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\Lambda$ mit der induzierten symplektischen Standardstruktur $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ ist eine symplektische Mflk.

Beispiel 2.4.: Der projektive Raum $\mathbb{C}P^{n-1} = \frac{\mathbb{C}^n - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$

$$[z_1 : \ldots : z_n] = [\lambda z_1 : \ldots : \lambda z_n] \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

ist eine symplektische Mflk mit

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{|z|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{|z|^2} \right) dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

(<u>Fubini-Study Form</u>)

Übungsaufgabe 15: Zeige, dass ω_{FS} eine symplektische Struktur auf $\mathbb{C}P^{n-1}$ definiert. Bestimme ω_{FS} in den lokalen Karten $U_\alpha = \{ z_\alpha \neq 0 \}$ für $\alpha = 1, \ldots, n$.

Beispiel 2.5. Gegeben sei eine diff. Mflk M. Das <u>Kotangentialbündel T^*M</u> trägt eine <u>kanonische symplektische Struktur</u>, die wir im Folgenden näher beschreiben wollen.

Die symplektische Struktur ist als 2-Form eine bilineare Funktion auf $T(T^*M)$. Es gilt aber:

Ein Punkt auf der Mflk T^*M ist gegeben durch ein Paar (p,s), wobei $p \in M$ und $s \in T_p M$ ist.

$$T_{(p,s)}(T^*M) \cong T_p M \oplus T_s(T_p^* M) \cong T_p M \oplus T_p^* M \qquad (*)$$

Aus Bsp. 1.1. wissen wir, dass $W \oplus W^*$ eine Kanonische symplektische Struktur hat:

$$\Omega_0(u \oplus f, v \oplus g) = g(u) - f(v)$$

Die kanonische symplektische Struktur auf T^*M ist eine Verallgemeinerung: Auf einer Karte $U \ni p$ von M mit Koordinaten $(q_1, \dots, q_m)$, $m = \dim M$, und Koordinaten $(p_1, \dots, p_m)$ auf dem zugehörigen Kotangentialraum T_p^*M ist

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^{m} dq_i \wedge dp_i \quad \in \Omega^2(T^*M).$$

Lemma 2.6: ω_{can} ist exakt, $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$ mit <u>kanonischer 1-Form</u> $\lambda_{can} \overset{(lokal)}{=} \sum_{i=1}^{m} p_i \, dq_i$.

Bem.: Der Kartenwechsel auf T^*M ist genau so, dass λ_{can} und ω_{can} unabhängig von der Koordinatenwahl sind:

$$(q_i, p_j) \longmapsto \left(\tilde{q}_i(q), \tilde{p}_j = \sum_{k=1}^{m} p_k \left(\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_k}\right)^{-1}\right)$$

Die 1-Form λ_{can} verdient die Bezeichnung "kanonisch" wie folgt:

Satz 2.7.: $\lambda_{can} \in \Omega^1(T^*M)$ ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft, dass für alle $\sigma \in \Omega^1(M)$ (d.h. $\sigma: M \to T^*M, p \mapsto \sigma_p \in T_p^*M$) gilt:

$$\sigma^* \lambda_{can} = \sigma .$$

Bew 2.7.: In lokalen Koordinaten sei $\sigma = \sum_{i=1}^m \sigma_i(q)\, dq_i$, d.h.

$$\sigma: U \subset M \longrightarrow T_U^* M$$
$$(q_1, \dots q_m) \longmapsto (q_1, \dots, q_m, \sigma_1(q), \dots, \sigma_m(q))$$

auf $U \subset M$:

$$\Rightarrow \sigma^* \lambda_{can} = \sigma^*\left(\sum_{i=1}^m p_i\, dq_i \right) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(q)\, dq_i = \sigma$$

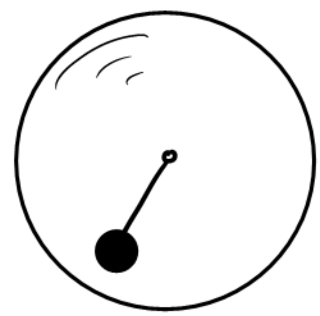
Sei $\tilde{\lambda} \in \Omega^1(T^*M)$ mit $\sigma^* \tilde{\lambda} = \sigma$, $\forall \sigma \in \Omega^1(M)$. Dann is $\sigma^* \tilde{\lambda} = \sigma^* \lambda_{can}$ $\forall \sigma \Rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda_{can}$ $\square$

(Ende Beispiel 2.5)

Bem.: Kotangentialbündel mit der kanonischen symplektischen Struktur und 1-Form (vgl. Wirkungsform in Def. 0.10) spielen eine wichtige Rolle in der klassischen Mechanik als Phasenraum.

Dabei ist die Basismflk M der Konfigurationsraum und die Vektoren in T_pM die Impulse.

Bsp 2.8: Sphärisches Pendel:



Konfigurationsraum $= S^2$

Phasenraum $= T^*S^2$

Bem: Symplektische Mflk besitzen immer eine Volumenform

$$\mathrm{vol}_\omega = \frac{1}{n!}\,\omega^{\wedge n} \in \Omega^{2n}(M).$$

Kor. 2.8. Symplektische Mflk (M,ω) sind orientierbar.

Bew. 2.9: M heißt <u>orientierbar</u>, falls für jeden Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ die Koordinaten, d.h. φ_α, so gewählt werden können, sodass $\forall \alpha, \beta$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ für die Übergangsfunktionen $\det \chi_{\alpha\beta} > 0$ gilt.

Eine Volumenform auf M in lokalen Koord. hat die Form: $\mathrm{vol}_\alpha = \mathrm{vol}|_{U_\alpha} = f_\alpha(y)\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$ auf U_α mit $f_\alpha(y) > 0 \ \forall \alpha$ (oder $f_\alpha(y) < 0 \ \forall \alpha$)

Ein Koordinatenwechsel auf $U_\alpha \cap U_\beta \neq \{\emptyset\}$:

$$\chi_{\alpha\beta}^{*} \mathrm{vol}_\alpha \big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\alpha(y(x)) \det\left(\frac{dy}{dx}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

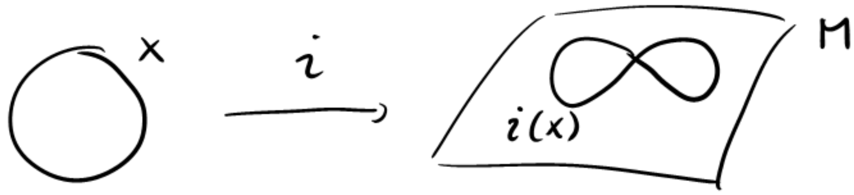
$$= \mathrm{vol}_\beta \big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

$$\Rightarrow \quad f_\alpha \det\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_\beta \quad \Rightarrow \quad \det\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0 \quad \square$$

2.4. Untermannigfaltigkeiten

Gegeben zwei Mflk X und M, $\dim X < \dim M$.

Eine differenzierbare Abbildung $i : X \longrightarrow M$ heißt **Immersion**, wenn $di_p : T_pX \longrightarrow T_{i(p)}M$ injektiv ist.



Eine **Einbettung** ist eine Immersion, die ein Homöomorphismus auf das Bild ist.

Bem.: Wir nehmen an, dass alle Einbettungen **geschlossen** sind, d.h. $i(X)$ ist geschlossen in M.

Eine **Untermannigfaltigkeit** von M ist eine diff. Mflk X zusammen mit einer Einbettung $i : X \hookrightarrow M$.

Def 2.10. Eine Untermannigfaltigkeit X von (M, ω) heißt **isotrop**, **koisotrop**, **Lagrange** bzw. **symplektisch** falls für alle $p \in X$ der Unterraum $T_pX \subset T_pM$ isotrop, koisotrop, Lagrange bzw. symplektisch ist.

Sei $T_p^\omega X$ der ω-orthogonale Unterraum zu T_pX in T_pM.

Def. 2.11. $TX^\omega = \bigcup_{p\in X} T_pX^\omega \subset T_XM$ heißt <u>ω-orthogonales Tangentialbündel</u>.

Nach Satz 1.5 haben die Untermflk folgende Eigenschaften: Sei $\iota: X \hookrightarrow M$ die Einbettung.

Kor. 2.12.

X isotrop $\Leftrightarrow \omega|_{TX} = 0 \Leftrightarrow \iota^*\omega = 0 \Rightarrow \dim X \leq \frac{\dim M}{2}$

X koisotrop $\Leftrightarrow \omega|_{TX^\omega} = 0 \Rightarrow \dim X \geq \frac{\dim M}{2}$

X Lagrange $\Leftrightarrow \omega|_{TX} = 0 \;\&\; \omega|_{TX^\omega} = 0 \Leftrightarrow \iota^*\omega = 0 \;\&\; \dim X = \frac{\dim M}{2}$

X symplektisch $\Leftrightarrow \omega|_{TX}$ nicht-entartet $\Leftrightarrow \iota^*\omega$ ist eine sympektische Struktur auf X

Im Folgenden wollen wir die Geometrie von koisotropen und Lagrangen Untermflk verstehen. Dazu benötigen wir noch weitere Begriffe aus der Differenzialgeometrie.