

Die Kontraktion mit einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine lineare Abbildung $\iota_X: \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ definiert durch:

$$\iota_X \omega(Y_1, \dots, Y_k) := \omega(X, Y_1, \dots, Y_k) \quad \forall Y_i \in \mathfrak{X}(M),$$

wobei $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$. In lokalen Koordinaten mit

$$\omega = \sum_{i_0 < \dots < i_k} \omega_{i_0 \dots i_k} dx^{i_0} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}:$$

$$\iota_X \omega = \sum_{i, i_1 < \dots < i_k} X^i \omega_{i i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Eigenschaften der Kontraktion:

$$\text{(Leibnitz)} \quad \iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X \omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge \iota_X \eta$$

$$\text{(anti-symm.)} \quad \iota_X \iota_Y \omega = -\iota_Y \iota_X \omega$$

$$\text{(nil-potent)} \quad \iota_X^2 = 0$$

Lemma 2.13. Gegeben eine symplektische Pfld (M, ω) .

Die Abbildungen

$$\omega^b: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \quad \omega_p^b: T_p M \rightarrow T_p^* M$$

$$X \mapsto \iota_X \omega$$

$$X_p \mapsto \iota_{X_p} \omega_p$$

sind Isomorphismen.

Vektorfelder bilden den Vektorraum aller Ableitungen der Algebra $\mathcal{F}(M)$. Für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist für alle $f \in \mathcal{F}(M)$

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

wieder eine Ableitung auf $\mathcal{F}(M)$, d.h.

$$[\cdot, \cdot]: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M).$$

Diese anti-symmetrische Klammer heißt Lie-Klammer.

Übungsaufgabe 16: Zeige, dass $[X, Y]$ tatsächlich eine Ableitung auf $\mathcal{F}(M)$ definiert, d.h. $[X, Y]: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ ist linear und erfüllt die Leibnitz-Regel.

Übungsaufgabe 17: Zeige, dass $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra ist, d.h. ein Vektorraum mit anti-symmetrischer Klammer, die die Jacobi-Identität erfüllt: $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$

Zeige, dass daraus folgt, dass für jedes $X \in \mathcal{X}(M)$ die Abbildung $[X, \cdot]: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ eine Ableitung auf der Lie-Algebra $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$ definiert.

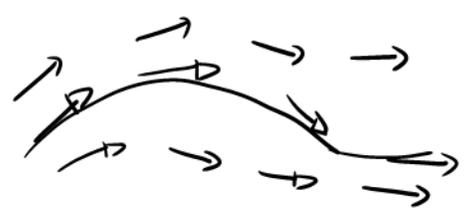
Betrachte einen diff. Weg $\gamma: I \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t)$.

Die Ableitung $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ ist eine Abbildung

$\gamma': I \rightarrow TM$, d.h. der push-forward $\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$ auf $\gamma(I)$.

Ein diff. Weg $\gamma: I \rightarrow M$ heißt Integralkurve oder Flusslinie eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$, falls

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \quad \forall t \in I.$$



Lemma: Gegeben ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$, dann existiert für alle $p \in M$ ein offenes Intervall $I_p \subset \mathbb{R}, 0 \in I_p$, und eine Integralkurve $\gamma: I_p \rightarrow M$ für X mit $\gamma(0) = p$.

Wenn I_p maximal ist, dann ist γ eindeutig.

↑
(entweder \mathbb{R} oder S^1 oder $\gamma(I_p)$ "verlöst"
M am Anfang oder Ende des Intervalls)

Bew. mittels Eindeutigkeit des gewöhnlichen Diff.-

Gleichungssystems $\gamma' = X_{\gamma(p)}$ mit $\gamma(0) = p$.

Die maximalen Integralkurven eines Vektorfeldes ⁽⁷³⁾

$X \in \mathfrak{X}(M)$ bilden eine diff. Abbildung

$$\mathcal{G}: \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, p) \mapsto \mathcal{G}_t(p),$$

die Fluss von X genannt wird.

Bem.: Gegebenenfalls muss \mathbb{R} entsprechend auf ein offenes Intervall eingeschränkt werden

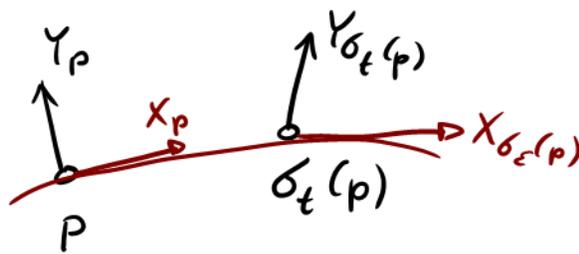
Der Fluss eines Vektorfeldes trägt eine kommutative Gruppenstruktur:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{t+s} &= \mathcal{G}_t \circ \mathcal{G}_s & (t, s, t+s \text{ eingeschränkt}) \\ \mathcal{G}_0 &= \text{Id}_M & \text{auf ein genügend} \\ & & \text{kleines offenes} \\ (\mathcal{G}_t)^{-1} &= \mathcal{G}_{-t} & \text{Intervall } I \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Für ein festes $t \in I$ ist $\mathcal{G}_t: M \rightarrow M$ damit ein Diffeomorphismus.

Übungsaufgabe 18: Zeige, dass $\mathcal{G}_{t+s} = \mathcal{G}_t \circ \mathcal{G}_s$ gilt.

Wie ändern sich Vektorfelder, Form, Funktionen entlang einer Integralkurve zu $X \in \mathfrak{X}(M)$?



Vergleiche die Tangentialvektoren Y_p und $Y_{\sigma_t(p)}$ mittels push-forward:

Die Lie-Ableitung von $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entlang $X \in \mathfrak{X}(M)$ (letzteres mit Fluss σ_t) ist definiert als:

$$\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\mathcal{L}_X Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sigma_{-t})_* (Y_{\sigma_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt} (\sigma_{-t})_* (Y_{\sigma_t(p)}) \Big|_{t=0}$$

Für $f \in F(M)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X Y(f)|_p &= \frac{d}{dt} \left[(\sigma_{-t})_* Y(f) \Big|_{\sigma_t(p)} \right]_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[Y(f \circ \sigma_{-t}) \Big|_{\sigma_t(p)} \right]_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[Y(f \circ \sigma_{-t}) \circ \sigma_{t*} \Big|_p \right]_{t=0} = X(Y(f)) - Y(X(f)) = \\ &= [X, Y](f) \end{aligned}$$

$\frac{d\sigma_t}{dt} = X$

D.h. die Lie-Ableitung auf Vektorfeldern ist die $\textcircled{75}$

Lie-Klammer:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Die Lie-Ableitung entlang $X \in \mathfrak{X}(M)$ von diff. Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ ist definiert als

$$\mathcal{L}_X f := \left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t \right|_{t=0} = X(f).$$

Die Lie-Ableitung von Formen entlang $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M),$$

ist definiert als:

$$\mathcal{L}_X \omega := \left. \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega \right|_{t=0}.$$

Eigenschaften der Lie-Ableitung von Formen:

(i) Leibnitz: $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta$

(ii) $\mathcal{L}_X \omega(Y_1, \dots, Y_k) = \mathcal{L}_X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_i, \dots, Y_k)$

(iii) $\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \mathcal{L}_X \phi_t^* \omega = \phi_t^* \mathcal{L}_X \omega$

(iv) Cartan Formel: $L_X \omega = (di_X + i_X d)\omega$

(v) $i_X L_X = L_X i_X$, $dL_X = L_X d$

Übungsaufgabe 19: Zeige die Eigenschaften (i)-(v).

Wir haben gesehen das ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu einer Kurve, d.h. zu einer 1-dim. Untermfлк E , integriert werden kann. Gegeben k Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, wann können diese zu einer k -dim. Untermfлк N integriert werden?

Sei $E = \bigcup_{p \in M} E_p$ mit $E_p \subset T_p M$, sodass die Unterräume

E_p alle gleichen Rang haben, $\dim E_p = k$, und lokal k diff. Vektorfelder existieren, die im Punkt p den

Vektorraum E_p aufspannen.

Wir schreiben

$E \subset TM$ und nennen E ein Unterbündel von TM oder

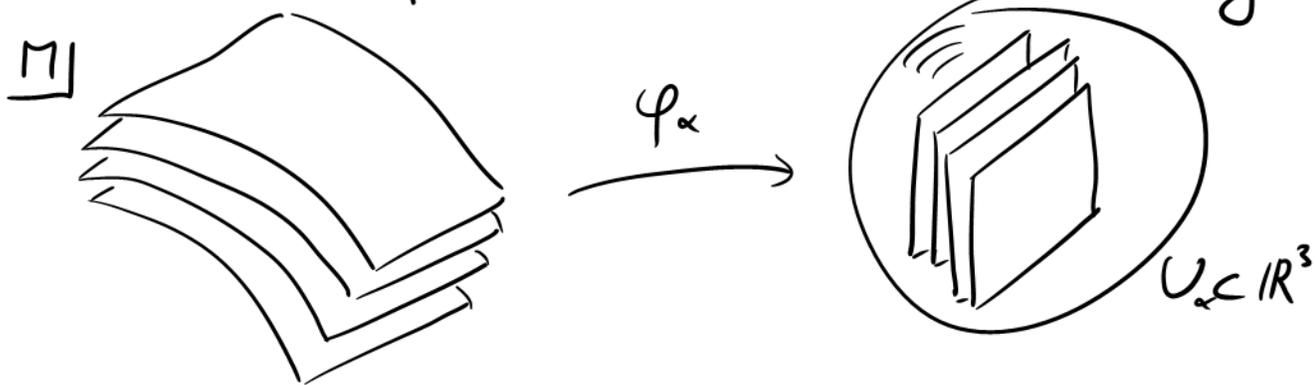
Verteilung.

$$\Gamma(E) = \{ X \in \mathfrak{X}(M) \mid X: M \rightarrow E \subset TM \}$$

Eine Verteilung E cTM heißt integrierbar, falls $\textcircled{77}$
 $\forall X, Y \in \Gamma(E)$ gilt, dass $[X, Y] \in \Gamma(E)$.

Satz von Frobenius: Sei E cTM eine k -dimensionale Verteilung, dann kann E zu k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten durch jeden Punkt $p \in M$ integriert werden.

Bem.: Diese UntermfLk bilden eine Blätterung.



Die UntermfLk der Blätterung heißen Blätter.

(mehr dazu: Peter Michor, Topics in Differential Geometry 3.18)

2.6. Koisotrope Untermannigfaltigkeiten I

Erinnerung: Gegeben (M, ω) . Eine Untermfлк $C \subset M$

heißt koisotrop, falls:

$$TC^\omega \subseteq TC \Leftrightarrow \omega|_{TC^\omega} = 0.$$

Gegeben eine Untermfлк $Y \subset M$, und N_p^*Y der Annulator von T_pY in T_pM , d.h.

$$N_p^*Y = \{ \omega_p \in T_p^*M \mid \omega_p(X_p) = 0 \ \forall X_p \in T_pY \}.$$

$N^*Y = \bigcup_{p \in Y} N_p^*Y$ heißt Konormalbündel von Y .

Lemma 2.14: Gegeben (M, ω) und $C \subset M$.

Der Isomorphismus $\omega^b: TM \xrightarrow{\cong} T^*M$

(von Lemm 2.13) induziert einen Isomorphismus

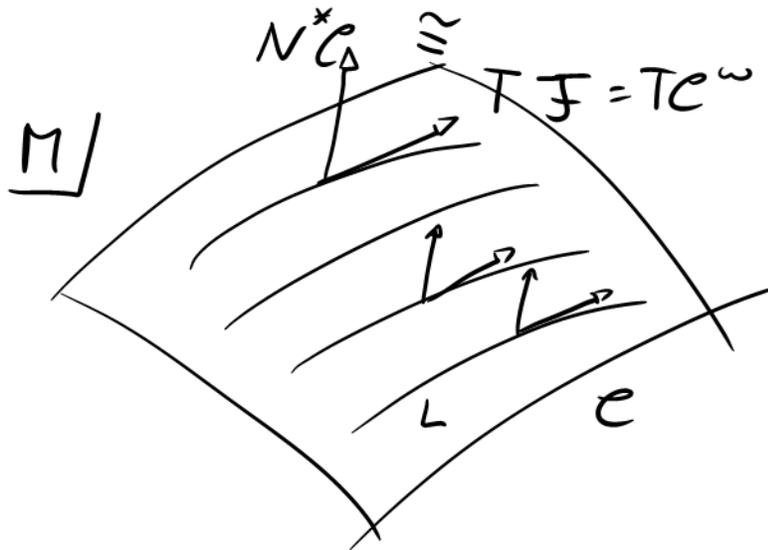
$$\begin{aligned} \omega^b: T_pC^\omega &\xrightarrow{\cong} N_p^*C \\ X &\longmapsto i_x\omega \end{aligned}$$

Bew 2.14: $X \in T_pC^\omega \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \omega(X, Y) = 0 \ \forall Y \in T_pC$

$$0 = \omega(X, Y) = i_x\omega(Y) \Rightarrow i_x\omega \in N_p^*C \quad \square$$

Lemma 2.15: Gegeben (M, ω) und \mathcal{C} koisotrop.

Das Unterbündel $TC^\omega \subseteq TC$ ist eine integrierbare Verteilung. Die zugehörige Blätterung \mathcal{F} heißt charakteristische Blätterung. Die Blätter von \mathcal{F} sind isotrope Untermflichen L von M . Mit $L \xrightarrow{z} \mathcal{C}$ gilt $z_* TL = TC^\omega|_L$. Wir schreiben $T\mathcal{F} = TC^\omega$ für den Tangententialraum der Blätterung.



Bew. 2.15: zu zeigen: Wenn $X, Y \in TC^\omega$, dann ist $[X, Y] \in TC^\omega$.

$\forall Z \in TC$ gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geschlossene} \\ \text{Form}}}{d\omega}(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) \\
 &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \\
 &= -\omega([X, Y], Z) \Rightarrow [X, Y] \in TC^\omega
 \end{aligned}$$

$$L \text{ koisotrop} \Leftrightarrow \omega|_{T_e L} = 0 \Rightarrow \omega|_{T_e L} = 0$$

$\Rightarrow L$ ist isotrop. \square

Bem.: Falls L eine Lagrange-Untermannigfaltigkeit ($T_e L = T_e L^\omega$) ist, dann besteht die Blätterung aus einem Blatt, nämlich L selbst.

2.7. Hamiltonsche und symplektische Vektorfelder, Poissonstrukturen

Def. 2.16: Gegeben (M, ω) . Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt: (i) symplektisch, $X \in \mathfrak{X}(M, \omega)$, falls $\mathcal{L}_X \omega = 0$,

(ii) Hamiltonsch, $X \in \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$, falls eine Funktion $f \in F(M)$ existiert, sodass $i_X \omega = df$.

Dann schreibt man $X = X_f$.

Satz 2.17: Der Isomorphismus $\omega^b: \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(M)$ induziert die folgenden Isomorphismen:

(i) $\omega^b: \mathfrak{X}(M, \omega) \xrightarrow{\cong} Z^1(M)$
↑ geschlossene 1-Formen

(ii) $\omega^b: \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega) \xrightarrow{\cong} B^1(M)$
↑ exakte 1-Formen

Die Sequenz

(81)

$$0 \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega) \hookrightarrow \mathfrak{X}(M, \omega) \rightarrow H^1(M) \rightarrow 0$$

ist eine exakte Sequenz von Lie-Algebren.

Bem.: - $H^2(M)$ trägt die triviale Lie-Algebra.

- Falls $H^2(M) = 0$, dann gilt $\mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega) = \mathfrak{X}(M, \omega)$.

Bew 2.17: (i) $X \in \mathfrak{X}(M, \omega) \Leftrightarrow 0 = \mathcal{L}_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega$
 $= d i_X \omega \Rightarrow$
 $i_X \omega \in Z^1(M)$

(ii) $X \in \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega) \Leftrightarrow i_X \omega = df \Rightarrow i_X \omega \in B^1(M)$

Als Sequenz von Vektorräumen ist die Exaktheit trivial. Für die Lie-Klammer gilt

$$[\mathfrak{X}(M, \omega), \mathfrak{X}(M, \omega)] \subseteq \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$$

wie das folgende Lemma zeigt. Im Speziellen ist

$\mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$ ein Ideal in $\mathfrak{X}(M, \omega)$ und der

Quotient $\frac{\mathfrak{X}(M, \omega)}{\mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)}$ trägt die triviale

Lie-Klammer: $X, Y \in \mathfrak{X}(M, \omega) : [X, Y] \sim 0$. \square

Lemma 2.18: Für $Y, Z \in \mathfrak{X}(M, \omega)$ gilt

$$[Y, Z] = -X_{\omega(Y, Z)} \in \mathfrak{X}_{ham}(M, \omega).$$

Bew. 2.18:

$Y, Z \in \mathfrak{X}(M, \omega)$ zu zeigen:

$$i_{[Y, Z]} \omega = -d(\omega(Y, Z))$$

$$\begin{aligned}
d(\omega(Y, Z))(x) &= (d i_Z i_Y \omega)(x) - (\mathcal{L}_Z i_Y \omega)(x) - (i_Z d i_Y \omega)(x) \\
&= (\mathcal{L}_Z i_Y \omega)(x) - \overset{=0}{(i_Z \mathcal{L}_Y \omega)(x)} \\
&= \mathcal{L}_Z(i_Y \omega(x)) - i_Y \omega([Z, X]) = \\
&= \mathcal{L}_Z(\omega(Y, X)) - \omega(Y, [Z, X]) = \\
&= \overset{=0}{\mathcal{L}_Z \omega(Y, X)} + \omega([Z, Y], X) + \omega(Y, [Z, X]) \\
&\qquad\qquad\qquad - \omega(Y, [Z, X]) = \\
&= -i_{[Y, Z]} \omega(x) \quad \square
\end{aligned}$$

Def 2.19: Gegeben (M, ω) . Die Poisson-Klammer zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{F}(M)$ ist definiert als:

$$\{f, g\} := i_{X_f} i_{X_g} \omega = \omega(X_g, X_f).$$

Bem.: Mit Cartans Formel und $i_{X_f}\omega = df$ gilt (83)

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= i_{X_f} i_{X_g} \omega = i_{X_f} dg = X_f(g) = \mathcal{L}_{X_f}(g) \\ &= -i_{X_g} i_{X_f} \omega = -i_{X_g} df = -X_g(f) = -\mathcal{L}_{X_g}(f)\end{aligned}$$

Betrachte die surjektive Abbildung $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$,
 $f \mapsto X_f$. Der Kern sind die konstanten Funktionen
 $Z^0(M) = M^0(M)$.

Satz 2.20: Die Poisson-Klammer $\{.,.\}: \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$
macht $\mathcal{F}(M)$ zu einer Lie-Algebra. Die
Abbildung $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$, $f \mapsto X_f$ ist ein
Lie-Algebren Homomorphismus, d.h.

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g],$$

und

$$0 \rightarrow Z^0(M) \hookrightarrow \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega) \rightarrow 0$$

ist somit eine exakte Sequenz von Lie-Algebren.

Bew. 2.20:

84

zu zeigen:

Übungsaufgabe 20: Zeige, dass die Poisson-Klammer die Jacobi-Identität erfüllt:

$$\{f, \{g, h\}\} + \text{zykl. vert.} = 0$$

$\Rightarrow (\mathcal{F}(M), \{.,.\})$ ist eine Lie-Algebra.

zu zeigen: $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$

nach Lemma 2.18 gilt:

$$[X_f, X_g] = -X_{\omega(X_f, X_g)} = X_{\{f,g\}} \quad \square$$

2.8. Koisotrope Untermannigfaltigkeiten II

Hier wollen wir algebraische Aspekte von koisotropen Untermfkt studieren.

Satz 2.21: Gegeben (M, ω) , $\dim M = 2n$, und k Funktionen $f = (f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{F}(M)$, sodass $\forall p \in M$ $df_1|_p, \dots, df_k|_p \in T_p^*M$ linear unabhängig sind und Poisson-kommutieren (in Involution sind), d.h.

$$\{f_i, f_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k.$$

Dann ist $C = f^{-1}(c)$ für $\forall c \in \mathbb{R}^k$ eine koisotrope Untermannigfaltigkeit von M mit $\dim C = 2n - k$, $k \leq n$

Bew. 2.21: Die Hamiltonschen Vektorfelder X_{f_i} sind tangential zu $C = f^{-1}(c)$, da

$$X_{f_i}(f_j) = \{f_i, f_j\} = 0.$$

Aus df_i linear unabhängig folgt:

(a) (df_1, \dots, df_k) spannen $N_p^* C$ in jedem Punkt $p \in C$ auf.

(b) mit Lemma 2.14 spannen X_{f_1}, \dots, X_{f_k} das ω -orthogonale Bündel auf

$$\Rightarrow TC^\omega \subseteq TC \quad \square$$

Bem. 2.22:

(a) Satz 2.21 sagt im Speziellen, dass die maximale Anzahl unabhängiger Poisson-kommutierender Funktionen $k = \frac{1}{2} \dim M = n$ ist.

(b) Falls $k = n$, dann ist $f^{-1}(c)$ eine Lagrange Untermannf. (f_1, \dots, f_n) nennt man dann komplett integrierbares System.

(c) $f^{-1}(c)$ ist eine Blätterung von M . Die Blätter $\textcircled{86}$ sind koisotrope Untermannigfaltigkeiten $C = f^{-1}(c)$ für feste c , $TB|_C = TC$. Tatsächlich gilt:

$$X, Y \in TB: X(f_i) = 0 = Y(f_i)$$

$$\Rightarrow [X, Y](f_i) = 0 \Rightarrow [X, Y] \in TB$$

Die Umkehrung von Satz 2.21 gilt nur lokal:

Satz 2.23: Gegeben (M, ω) und $C \subset M$ koisotrop, $\dim C = k$.

Dann existiert zu jedem Punkt $p \in C$ eine Umgebung $U_p \subset M$, $p \in U_p$, und k Funktionen

$f_i \in F(U_p)$, $i = 1, \dots, k$, sodass:

(a) $(f_i)_i$ Poisson-kommutieren, $\{f_i, f_j\} = 0 \forall i, j$,

(b) $(df_i)_i$ linear unabhängig sind,

(c) $C \cap U_p = f^{-1}(0)$.

Bew. 2.23: Induktionsbeweis:

Annahme: $l (< k)$ Funktionen $f_1, \dots, f_l: U_p \rightarrow \mathbb{R}$

wurden konstruiert, sodass (a) und (b) erfüllt sind und $C \cap U_p \subset f^{-1}(0)$.

(87)

Konstruiere eine weitere Funktion $f_{e+1}: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften:

Nach Satz 2.21 induziert $f'(c)$ eine koisotrope Blätterung von U_p , $\text{codim } f^{-1}(c) = l$ für festes $c \in \mathbb{R}^p$.

Wegen $\mathcal{C} \cap U_p \subset f^{-1}(0)$ sind die Hamiltonschen Vektorfelder X_{f_1}, \dots, X_{f_l} tangential zu \mathcal{C} .

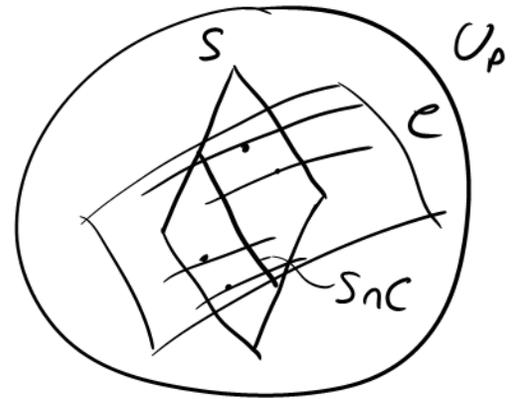
Wähle U_p klein genug, und eine Untermflk $S \subset U_p$ mit $\text{codim } S = l$, sodass sich S und \mathcal{C} transverse schneiden.

($\text{codim}(S \cap \mathcal{C}) = k+l$)

Weiters wähle eine diff.

Funktion $F_{e+1}: S \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$F_{e+1}(S \cap \mathcal{C}) = 0$ und $dF_{e+1}|_q \neq 0, \forall q \in S$.



Wähle U_p gegebenenfalls noch kleiner und betrachte die Flüsse $\sigma_t^{(f_i)}$ zu den Vektorfeldern $X_{f_i}, i=1, \dots, l$, durch S .

Da $[X_{f_i}, X_{f_j}] = X_{\{f_i, f_j\}} = 0$ gibt das eine Blätterung von U_p , und die Funktion F_{e+1} auf S

kann konstant entlang der Blätter zu eine Funktion $f_{e+1}: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ erweitert werden.

(d.h.: $f_{e+1}|_S = F_{e+1}$, $f_{e+1}(p) = f_{e+1}(\sigma_t^{(f_i)}(p))$)

Da f_{e+1} konstant entlang der Blätter, generiert durch X_{f_i} ist, gilt: $X_{f_i}(f_{e+1}) = \{f_i, f_{e+1}\} = 0$, $\forall i=1, \dots, e$.

$X_{f_{e+1}}$ und X_{f_1}, \dots, X_{f_e} sind linear unabhängig, da per Konstruktion $X_{f_{e+1}}$ tangential zu $S \cap \mathcal{L}$ ist, während X_{f_1}, \dots, X_{f_e} transverse zu S sind.

Schließlich gilt $\mathcal{L} \cap U_p \subset (f_1, \dots, f_e, f_{e+1})^{-1}(0)$. \square

Def 2.23: Gegeben (M, ω) und $Y \subset M$. Dann sei

$$\mathcal{F}_Y(M) = \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f|_Y = 0\}$$

das Verschwindungsideal von Y .

Für eine Untermannigfaltigkeit $Y \subset M$ haben TY , TY^ω und N^*Y die folgende algebraische Charakterisierung:

Prop. 2.24: Gegeben (M, ω) , $Y \subset M$ und $p \in Y$:

$$(i) \quad T_p Y = \{X \in T_p M \mid X(f) = 0, \forall f \in \mathcal{F}_Y(M)\}$$

$$(ii) \quad N_p^* Y = \{df|_p \in T_p^* M \mid f \in \mathcal{F}_Y(M)\}$$

$$(iii) \quad T_p Y^\omega = \{X_f \in T_p M \mid f \in \mathcal{F}_Y(M)\}$$

Bew. 2.24: Lokal sind diese Aussagen klar:

Man kann lokal immer Funktionen f_1, \dots, f_k (für $\text{codim } Y = k$) finden, sodass $Y \cap U = \bar{f}^{-1}(0)$.

z.B: (ii) " \supseteq ": $f \in \mathcal{F}_Y(M) \Rightarrow df|_p(x) = X(f)|_p = 0$

$$\begin{aligned} & \text{für } X \in T_p Y \\ & \Rightarrow df|_p \in N_p^* Y \end{aligned}$$

" \subseteq ": Lokal $Y \cap U = (f_1, \dots, f_k)^{-1}(0)$

mit $df_1|_p, \dots, df_k|_p$ spannen $N_p^* Y$

auf \Rightarrow jedes $\alpha \in N_p^* Y$ kann geschrieben werden als $\alpha = dg|_p$ für $g \in \mathcal{F}_{Y \cap U}(U)$.

Globalisierung: wähle eine

diff. Funktion $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(\varphi) \subset U$, $\varphi|_p = 1$, $d\varphi|_p = 0$, und

setze $f = \varphi \cdot g$ mit Null auf M fort.

$$\begin{aligned} \text{Dann } \alpha &= df|_p = d\varphi|_p g|_p + \varphi|_p dg|_p \\ &= dg|_p \quad \square \end{aligned}$$

Wie können nun koisotrope Untermflk \mathcal{L} durch das Ideal $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(M)$ charakterisiert werden?

(90)

Def 2.25: Eine Algebra $(A, +, \cdot)$ mit einer Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ heißt Poisson-Algebra, falls

$$[a, b \cdot c] = [a, b] \cdot c + b \cdot [a, c], \quad \forall a, b, c \in A.$$

Bem.: - Die Lie-Klammer wirkt als Ableitung auf das Produkt der Algebra.

- Lie-Klammer heißt, dass die Jacobi-Identität erfüllt ist.

Bem. 2.26: $(\mathcal{F}(M), \{\cdot, \cdot\})$ ist eine Poisson-Algebra.

Satz 2.27: Gegeben (M, ω) und $Y \subset M$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Y ist koisotrop.

(ii) Das Ideal $\mathcal{F}_Y(M)$ ist eine Poisson-Unteralgebra, d.h.

$$\{\mathcal{F}_Y(M), \mathcal{F}_Y(M)\} \subseteq \mathcal{F}_Y(M).$$

(iii) Für alle $f \in \mathcal{F}_Y(M)$ ist $X_f \in \mathcal{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$ tangential zu Y .

Bew 2.27: (ii) \Leftrightarrow (iii): $Y \subset M$: $\forall f \in \mathcal{F}_Y(M)$ gilt:

(iii) X_f tangential zu $Y \Leftrightarrow X_f(g)|_Y = 0, \forall g \in \mathcal{F}_Y(M)$

$\Leftrightarrow \{f, g\}|_Y = 0, \forall g \in \mathcal{F}_Y(M)$

$\Leftrightarrow \{f, g\} \in \mathcal{F}_Y(M), \forall g \in \mathcal{F}_Y(M)$ (ii)

$$\Leftrightarrow \omega(X_f, X_g) = 0, \forall g \in \mathcal{F}_Y(M) \Leftrightarrow \omega|_{TY} = 0 \quad (i)$$

$$T_p Y^\omega = \{X_f \mid f \in \mathcal{F}_Y(M)\}$$

91

□

2.9. Lagrange Untermannigfaltigkeiten

Erinnerung: Gegeben (M, ω) , $L \subset M$.

$$L \text{ ist Lagrange} \Leftrightarrow \omega|_{TL} = 0, \dim L = \frac{1}{2} \dim M \Leftrightarrow TL = TL^\omega$$

$$\Leftrightarrow L \text{ ist koisotrop und isotrop}$$

Hier werden wir einige Beispiele von Lagrange Untermannigfaltigkeiten konstruieren. Im vorigen Kapitel haben wir bereits gesehen, dass die Verschwindungsmenge von $n = \frac{1}{2} \dim M$ unabhängigen Funktionen in Involution eine Lagrange Untermannigfaltigkeit ist. Im Allgemeinen ist es aber sehr schwierig eine maximale Anzahl von Poisson-komm. Funktionen zu finden!

Das Kotangentenbündel mit der kanonischen, symplektischen Form $\lambda_{can} = \sum_{j=1}^n p_j dq_j$ ($\alpha^* \lambda_{can} = \alpha \forall \alpha \in \Omega^1(M)$) und Struktur $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$ stellt einige Beispiele bereit.

Beispiel 2.28: Der Nullschnitt des Kotangentenbündels, d.h. $s_0: M \rightarrow T^*M$, $q \mapsto (q, 0)$ ist eine Lagrange Untermannigfaltigkeit. Ebenso ist jeder Kotangentenraum $T_q^*(M)$, $\forall q \in M$, eine Lagrange Untermannigfaltigkeit. Für beide ist $\lambda_{can}|_L = 0$ und damit $\omega_{can}|_L = 0$.

Prop. 2.29: Gegeben sei eine diff. MfLk M .

Der Graph Γ_α einer 1-Form $\alpha: M \rightarrow T^*M$ ist genau dann Lagrange, wenn α geschlossen ist.

Bew. 2.29: Der Graph Γ_α ist das Bild der Einbettung $\alpha: M \rightarrow T^*M$.
Für den pull-back der kanonischen Form gilt:

$$\alpha^* \omega_{can} = -\alpha^* d\lambda_{can} = -d\alpha^* \lambda_{can} = -d\alpha \quad \square$$

Prop. 2.30: Gegeben sei eine diff. MfLk M und eine UntermfLk $Y \subset M$. Das Konormalbündel N^*Y ist eine Lagrange UntermfLk in T^*M .

Bew. 2.30: Sei $\dim Y = k, \dim M = n$.

In lokalen Koordinaten bei $p \in Y \subset M$, sodass

$$Y = \{q_{k+1} = 0, \dots, q_n = 0\} \text{ und}$$

$$N^*Y = \{q_{k+1} = 0, \dots, q_n = 0, p_1 = \dots = p_k = 0\}$$

gilt für die Einbettung $i: N^*Y \rightarrow T^*M$:

$$i^* \lambda_{can} = i^* \sum_{i=1}^n p_i dq_i = 0 \quad \square$$

Für $j: Y \hookrightarrow M$, betrachte den

pull-back: $j^*: T_Y^*M \rightarrow T^*Y$. Das Konormalbündel ist der "Kern" dieser Abbildung, d.h. das Urbild des Nullschnittes $s_0: Y \rightarrow T^*Y, p \mapsto (p, 0)$.

93
Noch allgemeiner definiert jedes Paar (Y, α) ,
wobei $Y \subset M$ und α eine geschlossene 1-Form auf Y ist,
eine Lagrange Untermflk in T^*M :

Prop. 2.31: $Y \subset M$ wie in 2.29. Sei $\alpha \in \Omega^1(Y)$. Das Urbild
des Graphen $\Gamma_\alpha \subset T^*Y$ bzgl. der Abbildung
 $j^*: T^*M \rightarrow T^*Y$ ist genau dann eine
Lagrange Untermflk, wenn α geschlossen
ist.

Bew. 2.31: Lokal wie in 2.29:

Das Urbild von Γ_α ist

$$\{q_{n+1} = \dots = q_n = 0, p_1 = \alpha_1(q), \dots, p_n = \alpha_n(q)\}.$$

$$\Rightarrow i^* \omega_{\text{can}} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} dq_i \wedge dq_j = -d\alpha \quad \square$$