

## 2.9. Fastkomplexe Strukturen

(99)

Hier wollen wir sehen inwiefern sich die Ergebnisse aus Kapitel 1.5 über kompatible komplexe Strukturen in symplektischen Vektorräumen auf symplektische MfLk erweitern lassen.

Def 2.32: Gegeben sei eine diff. MfLk  $M$ . Eine diff. Abbildung  $J: p \rightarrow (J_p: T_p M \rightarrow T_p M)$ , die jedem Punkt  $p \in M$  eine komplexe Struktur  $J_p$  auf dem Tangentialraum zuordnet (d.h.  $J_p^2 = -id$ ), heißt fastkomplexe Struktur.  $(M, J)$  heißt fastkomplexe MfLk.

Der Raum aller fastkomplexen Strukturen auf  $M$  wird mit  $\mathcal{J}(M)$  bezeichnet.

Def 2.33: Gegeben sei eine diff. MfLk  $M$ . Eine diff. Abbildung  $g: p \rightarrow (g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R})$ , die jedem Punkt  $p \in M$  ein positive definites Skalarprodukt  $g_p$  zuordnet, heißt (Riemannsche) Metrik auf  $M$ .  $(M, g)$  heißt Riemannsche MfLk.

Satz 2.34: Sei  $M$  eine (parakompakte) diff. MfLk. (99)  
Dann existiert eine Riemannsche Metrik.

Bew. 2.34: Skizze: parakompakt heißt, dass "immer" eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$  von  $M$  existiert, sodass eine Umgebung  $U_p$  jedes Punktes  $p$  existiert, die in endlich vielen  $U_\alpha$ 's enthalten ist.

Dann existiert eine Zerlegung der Eins zu  $\{U_\alpha\}$ , d.h. diff. Funktionen  $\varphi_\alpha: M \rightarrow [0,1]$

mit (a)  $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ ,

$$(b) \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(p) = 1, \quad \forall p \in M.$$

(c)  $\varphi_\alpha(p) \neq 0$  für endlich viele  $\alpha$ .

Wähle nun in jeder offenen Menge  $U_\alpha$  die Metrik  $p \rightarrow (g_p^{(\alpha)}: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} g_p^{(\alpha)}(X, Y) &= \langle X, Y \rangle \dots \text{Standard Skalarprodukt.} \\ &= \sum_{i=1}^n X^i(x) Y^i(x) \quad \begin{array}{l} x \dots \text{Koord. von } p \\ \text{in Karte bei } U_\alpha \end{array} \end{aligned}$$

Setze:

$$g_p(x, y) = \sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(p) g_p^{(\alpha)}(x, y) \dots \text{für jeden Punkt } p \in M$$

$\uparrow$                      $\uparrow$   
 $\geq 0$                      $> 0$

eine endliche Summe

$\Rightarrow g_p$  ist positiv-definit

$\Rightarrow g$  ist eine Metrik.  $\square$

Bem.: Aber nicht alle gerade-dim. diff. Mfllk lassen eine fastkomplexe Struktur zu.

z.B. auf den Sphären  $S^4, S^8, S^{10}, S^{12}, \dots$

gibt es keine fastkomplexe Struktur.

[Steenrod '51, Borel-Serre '53]

Lassen symplektische Mfllk eine fastkomplexe Struktur zu?

Def 2.35: Gegeben  $(M, \omega)$ . Eine fastkomplexe Struktur  $J$  auf  $M$  heißt kompatibel mit  $\omega$ , wenn

$$(g_J)_p(x, y) := \omega_p(x, J_p y) \quad \forall p \in M, x, y \in T_p M$$

eine Riemannsche Metrik definiert.

Prop. 2.36: Gegeben  $(M, \omega)$  mit einer Riemannschen Metrik  $g$ . Dann existiert eine kanonische fastkomplexe Struktur  $J$  auf  $M$ , die kompatibel mit  $\omega$  ist. (97)

Bew. 2.36: Betrachte zunächst die Tangentialräume  $(T_p M, \omega_p)$  mit Skalarprodukt  $g_p$ .

Nach Satz 1.25 (und Bem. (a) danach) existiert eine kanonische komplexe Struktur auf  $T_p M$ , kompatibel mit  $\omega_p$  und Skalarprodukt  $(g_p)_p$ .

Da  $\omega$  und  $g$  diff. sind, sind auch  $J$  und  $g_J$  differenzierbar.  $\square$

Kor. 2.37: Auf jeder symplektischen Mfkk  $(M, \omega)$  existiert eine kompatible, fastkomplexe Struktur.

Bew. 2.37: kombiniere 2.34 und 2.36.  $\square$

Bem. 2.38: Eine komplexe Mfkk  $M$  hat lokale Karten  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ , deren Übergangsfunktionen  $\chi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  holomorph sind.

$$T_p M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes T_p M = T_p^{(1,0)} M \oplus T_p^{(0,1)} M$$

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\} \quad \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right\}$$

$$J_p : T_p M^{\mathbb{C}} \rightarrow T_p M^{\mathbb{C}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \mapsto i \frac{\partial}{\partial z_j} \quad = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \mapsto -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

in reellen Koordinaten:  $z_j = x_j + iy_j$

$$J_p = J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Eine komplexe MfLk ist eine fastkomplexe MfLk, aber nicht umgekehrt.

Bem. 2.39: Auch bei fastkomplexen MfLk kann man den Tangentialraum in holomorphen und antiholomorphen Teil spalten:

$$T_p M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes T_p M = T_p^{(1,0)} M \oplus T_p^{(0,1)} M,$$

wobei

$$T_p^{(1,0)} M = \{ X \in T_p M^{\mathbb{C}} \mid J_p X = iX \},$$

$$T_p^{(0,1)} M = \{ X \in T_p M^{\mathbb{C}} \mid J_p X = -iX \}.$$

Def. 2.40: Ein fastkomplexe Struktur auf einer 99  
 diff. Mfkh heißt integrierbar, falls  $\forall p \in M$ :

$$[T_p^{(1,0)}M, T_p^{(1,0)}M] \subseteq T_p^{(1,0)}M.$$

Betrachte die Projektionsoperatoren  $P_{\pm}: T_p M^{\mathbb{C}} \rightarrow T_p^{(1,0)}M$ ,

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} \mp i J_p).$$

$$(P_{\pm}^2 = P_{\pm}, P_+ P_- = P_- P_+ = 0, P_+ + P_- = \mathbb{1}, J_p P_{\pm} = \pm i P_{\pm})$$

Dann ist eine fastkomplexe Struktur genau dann integrierbar, wenn:

$$P_- [P_+ X, P_+ Y] = 0 \quad \forall X, Y \in T_p M, p \in M.$$

Def. 2.43: Die Abbildung  $\mathcal{N}_J: TM \times TM \rightarrow TM$  mit

$$\mathcal{N}_J(X, Y) := [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y], \forall X, Y$$

heißt Nijenhuis-Tensor.

Satz 2.44: Gegeben eine fastkomplex Mfkh  $(M, J)$ .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a)  $(M, J)$  ist eine komplexe Mfkh.

(b)  $J$  ist integrierbar.

(c) Der Nijenhuis-Tensor  $\mathcal{N}_J$  verschwindet.

Bew. 2.44: (a)  $\Rightarrow$  (b) trivial

(a)  $\Leftarrow$  (c) Satz von Newlander-Nirenberg

(b)  $\Leftrightarrow$  (c):  $\forall X, Y \in T_p M$ :

$$\begin{aligned}
8 P_- [P_+ X, P_+ Y] &= (1+iJ) [(1-iJ)X, (1-iJ)Y] = \\
&= (1+iJ) \left( [X, Y] - i[JX, Y] - i[X, JY] - [JX, JY] \right) = \\
&= [X, Y] - [JX, JY] + [JX, Y] + [X, JY] \\
&\quad + iJ \left( [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \right) \\
\Rightarrow \operatorname{Re}(\dots) &= -\mathcal{N}_J(X, Y)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(\dots) = -\mathcal{N}_J(X, Y) \quad \square$$

Bem. 2.45: Im Folgenden bezeichnen wir integrierbare fastkomplexe Strukturen oft einfach als komplexe Strukturen.

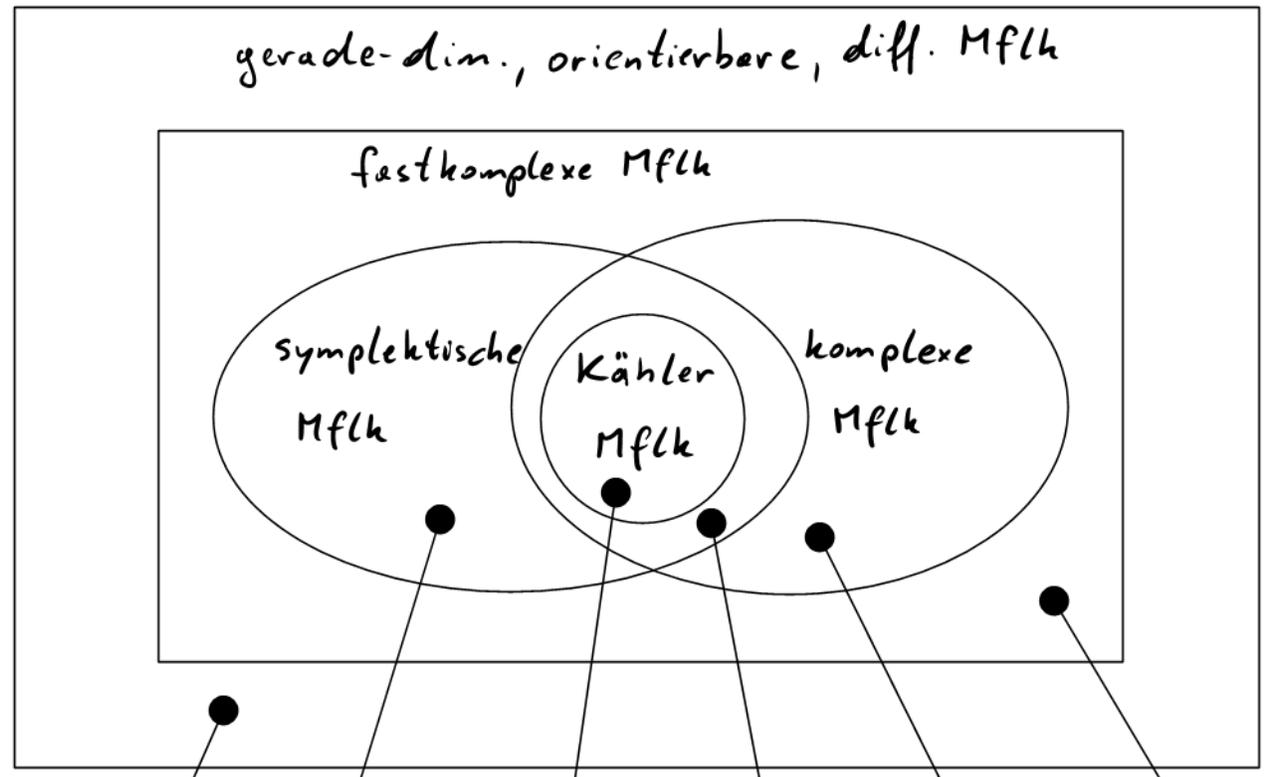
Def. 2.46: Eine symplektische MfLk  $(M, \omega)$  mit kompatiblen fastkomplexer Struktur  $J$  und Metrik  $g$ , heißt Kähler MfLk, falls  $J$  integrierbar ist, d.h.  $(M, J)$  eine komplexe MfLk ist.

Bem.: Kähler MfLk wurden hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Sie werden besser mit komplex-algebraischen Methoden studiert.

Bem 2.47: Wir haben bisher verschiedene Typen von diff. Mflk kennengelernt.

Im folgenden Diagramm sind diese in Relation gestellt  
 (Annahme: die Mflk sei kompakt, ohne Rand:

wenn  $\omega = dx$  :  $\omega^n = d(x_n(dx)^{n-1}) \Rightarrow \int_M \omega^n = \int_M dx = \int_{\partial M} x = 0$  ( )



Beispiele:

$S^4, S^8, S^{10}, \dots$

[Fernendéz-Gotay-Grey] tower of circle bundles

$$\begin{array}{c} S^1 \hookrightarrow M \\ \downarrow \\ S^1 \hookrightarrow P \\ \downarrow \\ T^2 \end{array}$$

$\mathbb{C}P^n$

[Kodaira-Thurston]

$\mathbb{R}^4 / \Gamma$   
 $(x_1, x_2, y_1, y_2) \sim (x_1, x_2+1, y_1, y_2)$   
 $\sim (\underline{x_1+1}, x_2, y_1, y_2)$   
 $\sim (x_1, x_2, y_1, \underline{y_2+1})$   
 $\sim (x_1, \underline{x_2+y_2}, \underline{y_1+1}, y_2)$

$S^6$   
 $(H^2_{\mathbb{R}}(S^{2n})=0, n>1)$

Hopf-Fläche  
 $S^1 \times S^3$   
 $\cong \mathbb{C}^2 - \{0\} / \Gamma$   
 $(z_1, z_2) \sim (2z_1, 2z_2)$

### 3. Symplektische Transformationen

(102)

Def 3.1.: Gegeben seien zwei  $2n$ -dimensionale symplektische Mfkk  $(M_1, \omega_1)$  und  $(M_2, \omega_2)$ . Ein Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$  heißt Symplektomorphismus falls  $f^* \omega_2 = \omega_1$ .  $M_1$  und  $M_2$  heißen dann symplektomorph. Die Gruppe der Symplektomorphismen  $f: M \rightarrow M$  werden mit  $\text{Symp}(M, \omega)$  (oder  $\text{Symp}(M)$ ) bezeichnet.

Beispiel 3.2. Jeder Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$  kann zu einem Symplektomorphismus auf dem Kotangentenbündel erweitert werden:

Prop. 3.3. Gegeben seien zwei diff. Mfkk  $M_1, M_2$  und ein Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$ . Dann ist die Abbildung

$$f\# : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$$

$$(q_2, p_2) \mapsto (f(q_2), (df^*)^{-1} p_2)$$

wieder ein Diffeomorphismus und es gilt:

$$f\#^* \lambda_{\text{can}, 2} = \lambda_{\text{can}, 1}.$$

Bew. 3.3.  $f_{\#}$  ist ein Diffeomorphismus, weil  $df^*$  invertierbar ist, und  $df^*, (df^*)^{-1} \in C^\infty$  sind. (103)

Lokal gilt

$$f_{\#}^* \sum_{i=1}^n p_{2,i} dq_{2,i} = \sum_{i,j,k=1}^n (df^*)_{ij}^{-1} p_{1,j} \frac{df_i}{dq_{2,k}} dq_{2,k}$$

$$= \sum_{j=1}^n p_{1,j} dq_{2,j} \quad \square$$

Bsp. 3.4. Frage: Gegeben zwei symplektische MfLk  $(M_1, \omega_1)$  und  $(M_2, \omega_2)$  und ein Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$ . Gesucht ist ein geometrisches Kriterium für wann  $f$  ein Symplektomorphismus ist!

(a) Betrachte das Produkt:

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & & \\ \swarrow \text{pr}_1 & \searrow \text{pr}_2 & \dots \text{Projektionen} \\ M_1 & & M_2 \end{array}$$

Das Produkt kann mit einer Familie von symplektischen Strukturen ausgestattet werden: Für  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

ist  $\Omega_\lambda = \lambda_1 \text{pr}_1^* \omega_1 + \lambda_2 \text{pr}_2^* \omega_2$ .

symplektisch. Im Speziellen sei  $\tilde{\omega} = \Omega_{(1,-1)} = \text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2$ .

(b) Der Graph des Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$  sei

(109)

$$\Gamma_f := \{(p, f(p)) \mid p \in M_1\} \subset M_1 \times M_2.$$

Dann gilt:

Prop 3.5: Ein Diffeomorphismus  $f: M_1 \rightarrow M_2$  ist genau dann ein Symplektomorphismus, wenn der Graph  $\Gamma_f$  eine Lagrange Untermflk von  $(M_1 \times M_2, \tilde{\omega})$  ist.

Bew. 3.5:  $z_f: M_1 \hookrightarrow M_1 \times M_2$ ,  $\text{Im}(z_f) = \Gamma_f$

$$z_f^* \tilde{\omega} = z_f^* (\text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2) = \omega_1 - f^* \omega_2$$

"  $\Gamma_f$  Lagrange

"  $f$  Symplektom.

In diesem Kapitel wollen wir uns aber hauptsächlich mit folgender Frage beschäftigen:

Wie sieht die Klassifizierung symplektischer Mflk bis auf Symplektomorphismen aus? Zur Erinnerung:

nach Kor. 1.16 sind alle symplektischen Vektorräume gleicher Dimension symplektomorph! Dies gilt

für symplektische Mflk gleicher

Dimension nicht mehr. Lokal stimmt jedoch weiterhin,

dass die Dimension die einzige Invariante ist:

(105)

Satz 3.6. (von Darboux) Jede symplektische Form  $\omega$  auf einer symplektischen MfLk  $M$  ist lokal (d.h.  $\exists$  Umgebung jedes Punktes) symplektomorph zur symplektischen Standardform  $\omega_{\text{std}} = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ .

Für den Beweis dieses Satzes werden wir noch weitere Techniken benötigen. Hier ein unmittelbares Korollar:

Kor. 3.7.: Gegeben  $(M, \omega)$  mit  $\dim M = 2n$ . Dann existiert ein Atlas  $\{U_\alpha\}$  auf  $M$  und Karten  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^{2n}$ , sodass  $\varphi_\alpha^* \omega_{\text{std}} = \omega$ .

Die Übergangsfunktionen dieses Atlas sind affine symplektische Transformationen

$\chi_{\alpha\beta} := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x) = \Psi(x) + x_0$ , d.h.  $\Psi \in \text{Sp}(2n)$ , für  $x \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ . Karten/Koordinaten mit dieser Eigenschaft heißen Darboux Karten/Koordinaten.

Bem.: Satz 3.6 und Kor. 3.7 sagen, dass es in der symplektischen Geometrie keine lokalen Invarianten gibt. Vgl.: in der Riemannschen Geometrie ist der Riemannsche Krümmungstensor eine lokale Invariante.

Bsp 3.8: Auf  $\mathbb{R}^{2n}$  ist jede symplektische Struktur  $\omega = \sum_{i < j=1}^{2n} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$  symplektomorph zur Standardstruktur  $\omega_{std} = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ .  
 ( $\omega_{ij}(x)$  kann nicht-konstant sein!)

### 3.1. Symplektische und Hamiltonsche Isotopien

Bisher hatten wir nur "zeit-unabhängige" Vektorfelder betrachtet.

Def 3.9. Gegeben eine (geschlossene, d.h. ohne Rand) diff. Mflk  $M$ , und ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Ein zeitabhängiges Vektorfeld  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$  ist eine ein-parametrische, diff. Familie von Vektorfeldern  $I \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . Der zugehörige Fluss  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d\phi_t}{dt} = X_t \circ \phi_t, \quad \phi_0 = id.$$

Eine ein-parametrische, diff. Familie von Diffeomorphismen  $\phi_t : M \rightarrow M$  für  $t \in \mathbb{R}$  und  $\phi_0 = id$  heißt Isotopie.

Bem.: Die Eigenschaften von Flüssen gelten weiterhin:  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

Lemma 3.10: Gegeben  $(M, \omega)$  geschlossen, und eine

Isotopie  $G_t$  zum zeit-abhängigen Vektorfeld  $X_t$ .

$G_t: M \rightarrow M$  ist genau dann ein Symplektomorphismus für alle  $t \in \mathbb{R}$ , wenn  $X_t$  ein symplektisches Vektorfeld ist.

Bew. 3.10: Symplektomorphismus heißt

$$G_t^* \omega = \omega \iff \frac{d}{dt} G_t^* \omega = 0, G_0 = \text{id}.$$

$$\frac{d}{dt} G_t^* \omega = G_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega \rightsquigarrow \updownarrow$$

$$\mathcal{L}_{X_t} \omega = 0 \quad \square$$

Def 3.11. Eine Isotopie  $G_t$  heißt symplektisch / Hamiltonsch, falls  $X_t$  für  $\forall t \in \mathbb{R}$  symplektisch / Hamiltonsch ist.

Falls  $\iota_{X_t} \omega = dH_t$  für  $H_t \in \mathcal{F}(M)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , dann heißt  $H_t$  zeit-abhängige Hamiltonsche Funktion.

Ein Symplektomorphismus  $\psi$  heißt Hamiltonsche Transformation,  $\psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ , falls eine Hamiltonsche Isotopie  $\psi_t$  existiert mit  $\psi_0 = \text{id}$  und  $\psi_1 = \psi$ .

Bem 3.12.: Die Gruppen  $\text{Ham}(M, \omega) \subset \text{Symp}(M, \omega)$  sind <sup>108</sup> unendlich-dim. im folgenden Sinn. Die Lie-Algebra von  $\text{Ham}(M, \omega)$  sind die Hamiltonschen Vektorfelder:  $\mathfrak{X}_{\text{ham}}(M, \omega)$  ist als Vektorraum unendlich-dim.!

Vgl. Riemannsche Geometrie: Die Gruppe der Isometrien ( $\psi^*g = g$ ) ist für  $M$  kompakt immer endlich-dimensional.

Nun wollen wir Deformationen von symplektischen Strukturen

(d.h. eine Familie  $\{\omega_t\}_{t \in [0,1]}$ , sodass  $\omega_t$  symplektisch ist)

mit Deformationen durch eine Isotopie ( $\omega \rightarrow \rho_t^* \omega$ )

vergleichen.

Dazu benötigen wir:

Def. 3.13:  $U \subseteq M$  sei eine offene Menge in einer diff. Mfllk.

Gegeben sei eine Isotopie  $g: [0,1] \times U \rightarrow U$ ,

$g_t = g(t, \cdot)$ . Eine diff., linear Abbildung

$$Q: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

heißt Homotopie-Operator von  $g_0$  nach  $g_1$ , falls

sie die Homotopie-Formel erfüllt:

$$g_1^* - g_0^* = dQ + Qd.$$

Lemma 3.14:  $U \subseteq M$  sowie  $g_t$  wie oben.  $X_t$  sei das zeit-abhängige Vektorfeld, das  $g_t$  generiert.

Dann ist für  $\alpha \in \Omega^k(U)$

$$Q\alpha := \int_0^1 g_t^* z_{X_t} \alpha dt$$

ein Homotopie-Operator.

Bew. 3.14:

$$\begin{aligned}
dQ\alpha + Qd\alpha &= d \int_0^1 g_t^* z_{X_t} \alpha dt + \int_0^1 g_t^* z_{X_t} d\alpha dt \\
&= \int_0^1 g_t^* \underbrace{(dz_{X_t} + z_{X_t}d)}_{L_{X_t}} \alpha dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} g_t^* \alpha dt = \\
&= g_1^* \alpha - g_0^* \alpha \quad \square
\end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} g_t^* = g_t^* L_{X_t}$

Lemma 3.15: Die deRham-Kohomologie auf  $M$  ist Homotopie-invariant, d.h. für  $\forall \alpha \in Z^k(M)$  und  $\forall$  Isotopien  $g_t$  existiert ein  $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ , sodass

$$g_1^* \alpha = \alpha + d\beta,$$

d.h.  $[g_1^* \alpha] = [\alpha] \in H^k(M)$

Bew. 3.15:  $g_1^* \alpha - \alpha = dQ\alpha + \underbrace{Qd\alpha}_0 = dQ\alpha$

Setze  $\beta = Q\alpha$ .  $\square$

Satz 3.16: Gegeben  $(M, \omega_1)$  und  $(M, \omega_0)$  und eine Isotopie  $g_t: M \rightarrow M, g_0 = \text{id}$ , sodass  $g_1^* \omega_0 = \omega_1$ .

Dann ist  $\{\omega_t = g_t^* \omega_0\}_{t \in [0,1]}$  eine diff. Familie von symplektischen Strukturen von  $\omega_1$  nach  $\omega_0$  und  $[\omega_t] = [\omega_0] \in H_{\text{dR}}^2(M)$ .

Bew. 3.16: Folge der Homotopie-Invarianz der deRham-Kohomologie.  $\square$

Bem.: Die Umkehrung von Satz 3.16 ist Moser's Stabilitätssatz, ein Folge von Moser's Trick:

Lemma 3.17: Sei  $M$  eine symplektische Mfлк mit einer diff. Familie  $\{\omega_t\}_{t \in [0,1]}$  von symplektischen Strukturen, sodass

$$\frac{d}{dt} \omega_t = d\beta_t$$

für eine diff. Familie von 1-Formen  $\{\beta_t\}$ .

Dann existiert eine Isotopie  $g: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , sodass

$$g_t^* \omega_t = \omega_0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Bew. 3.17 (Moser's Trick):

(111)

Jedes  $\omega_t$  in der Familie ist nicht-entartet, daher induziert es die Isomorphismen

$$\begin{aligned}\omega_t^b : \mathfrak{X}(M) &\xrightarrow{\cong} \Omega^1(M), \\ X_t &\mapsto \iota_{X_t} \omega_t.\end{aligned}$$

D.h.  $\beta_t \in \Omega^1(M)$  definiert ein eindeutiges zeit-abhängiges Vektorfeld  $X_t$ , sodass

$$\beta_t = -\iota_{X_t} \omega_t.$$

$\varphi_t$  ist der Fluss für  $X_t$  mit  $\varphi_0 = \text{id}$ . Tatsächlich gilt:

$$\frac{d}{dt} \omega_t = d\beta_t = -d\iota_{X_t} \omega_t = -\mathcal{L}_{X_t} \omega_t$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \omega_t = \varphi_t^* \mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \varphi_t^* \frac{d}{dt} \omega_t = 0$$

Fixieren der Integrationskonstante führt zum Resultat.  $\square$

Der folgende Satz besagt, dass eine Deformation einer symplektischen Struktur  $\omega$  innerhalb ihre Kohomologieklassen  $[\omega]$  nicht ändert (bis auf Diffeom.).

### Satz 3.18 (Moser's Stabilitätstheorem)

(112)

Gegeben eine geschlossene diff. Mfck  $M$  und  $\{\omega_t\}_{t \in [0,1]}$  eine diff. Familie von symplektischen Strukturen, sodass  $[\omega_t] = [\omega_0] \in H_{dR}^2(M)$ ,  $\forall t \in [0,1]$ . Dann existiert eine Isotopie  $\beta_t: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , sodass  $\beta_t^* \omega_t = \omega_0$ .

Bew 3.18: Aus  $[\omega_t] = [\omega_0]$  folgt, dass  $\omega_t - \omega_0$  und daher  $\frac{d}{dt} \omega_t$  exakt ist, d.h.

$\exists \beta_t \in \Omega(M)$  für alle  $t \in [0,1]$  mit

$$\frac{d}{dt} \omega_t = d\beta_t.$$

Falls  $\beta_t$  bzgl.  $t$  differenzierbar ist, kann Moser's Trick angewendet werden

$\beta_t$  differenzierbar folgt aus der

Hodge-Theorie:

①  $d^* = *d*$   $L^2$ -adjungierter Operator von  $d$

②  $d|_{d^*}: d^*(\Omega^2(M)) \xrightarrow{\cong} B^2(M)$

③ Setze  $\beta_t := (d|_{d^*})^{-1} \left( \frac{d}{dt} \omega_t \right)$ .  $\square$