

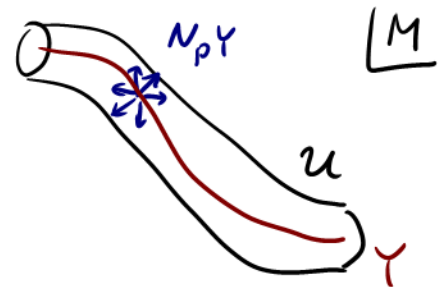
## 3.2. Darboux-Moser-Weinstein Theorie

(113)

Um den Satz von Darboux (und den allgemeineren Satz von Moser) zu beweisen, benötigen wir eine Homotopie-Formel (vgl. Lemma 3.14) für die Umgebung einer Untermannigfaltigkeit.

Gegeben sei eine Untermannigfaltigkeit  $Y \subset M$  und eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$ . Dann ist das Normalbündel  $NY$  von  $Y$  in  $M$  gegeben durch

$$N_p Y = \{ X_p \in T_p M \mid g_p(X_p, Y_p) = 0, \forall Y_p \in T_p Y \}.$$



Satz 3.19 (Umgebungstheorem):

$$\text{Sei } \mathcal{U}^\varepsilon = \{ (p, X_p) \in NY \mid \|X_p\|^2 = g_p(X_p, X_p) < \varepsilon \}$$

eine Umgebung des Nullschnittes  $Y \xrightarrow{\cong} NY$  für  $\varepsilon$  klein genug. Dann existiert eine Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $Y$  in  $M$ , und ein Diffeomorphismus  $\phi: \mathcal{U}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}$ , der  $Y \xrightarrow{\cong} M$  nach  $Y \hookrightarrow M$  abbildet.

Für den Beweis benötigen wir Geodäte:

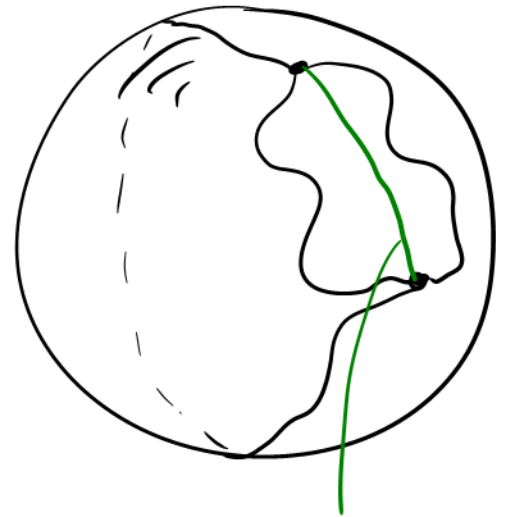
$g$  sei eine Metrik auf  $M$ , und  $\gamma: [0,1] \rightarrow M$  ein diff. Weg mit  $\gamma(0)=p, \gamma(1)=q$ . Dann ist die Länge

des Weges  $\gamma$  bzgl.  $g$  definiert als:

$$l(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)} dt$$

Eine Geodäte ist ein Weg von  $p$  nach  $q$  mit (lokal) minimaler Länge: Der geodätische Abstand zweier Punkte  $p$  und  $q$  ist

$$d(p,q) := \min_{\gamma | \gamma(0)=p, \gamma(1)=q} (l(\gamma))$$



Geodäte

$\gamma$  ist eine Geodäte, wenn (lokal)  $d(p,q) = l(\gamma)$ .

Die Geodäte ist eine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung, welche durch Variation von  $l(\gamma)$  bestimmt wird.

Übungsaufgabe 22: Bestimme die Geodätengleichung

(Euler-Lagrange- $g(g)$ ) 
$$\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} = \sum_{j,k} \Gamma(g)^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

durch Variation (vgl. Kapitel 0.1) von  $l(\gamma)$ .

Für eine eindeutige Lösung werden zwei Randbedingungen benötigt: zum Beispiel

$$y(0) = p, \quad \frac{dy}{dt}(0) = X_p \in T_p M. \quad (*)$$

Für ein Paar  $(p, X_p)$  schreiben wir die eindeutige Lösung als:

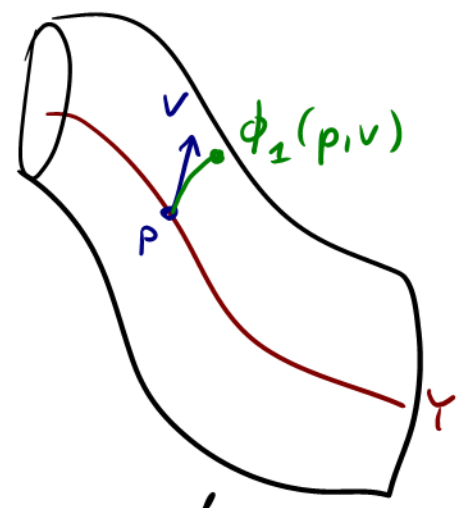
$$(p, X_p) \mapsto \phi_t(p, X_p) := y(t) \dots \text{Geodäte mit } (*)$$

im Spez.:  $\phi_t(p, 0) = p$ .

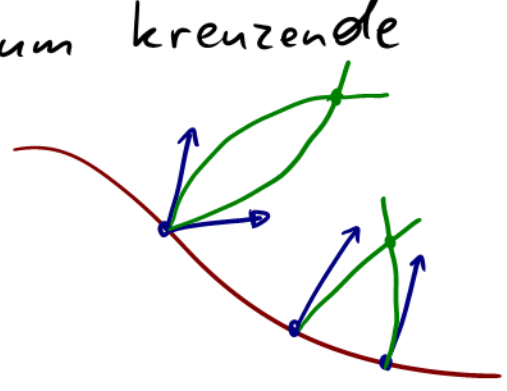
Beweisskizze 3.19: Umgebungstheorems:

Konstruiere einen Diffeomorphismus mit Hilfe der Zeit-1-Abbildung der Geodäten:

$$\begin{array}{ccc}
 NY & & M \\
 \downarrow \nu & & \downarrow \nu \\
 Y \hookrightarrow \mathcal{U}^\varepsilon & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{U} \hookrightarrow Y \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 (p, X_p) & \mapsto & \phi_1(p, X_p)
 \end{array}$$



$\mathcal{U}$  ist das Bild von  $\mathcal{U}^\varepsilon$ .  $\varepsilon$  muss kleingewählt werden, um kreuzende Geodäten auszuschließen. ( $\phi_2$  wäre dann nicht injektiv.)



Nun können wir folgenden Satz zeigen:

(116)

Satz 3.20: Gegeben  $M$  und eine Untermannigfaltigkeit  $Y \xrightarrow{z} M$  mit Umgebung  $\mathcal{U}$ . Weiters sei  $\alpha \in \mathbb{Z}^k(\mathcal{U})$ , eine geschlossene  $k$ -Form, mit der Eigenschaft  $z^* \alpha = 0$  ( $\in \mathbb{Z}^k(Y)$ ). Dann ist  $\alpha$  exakt, d.h.  $\alpha = d\mu$ , mit  $\mu|_p = 0, \forall p \in z(Y)$ .

Bew. 3.20: Der Umgebungssatz 3.19 erlaubt uns auf  $\mathcal{U}^\varepsilon \subset NY$  zu arbeiten:

Verwende die Homotopie-Formel für die Homotopie (= diff. Familie von diff. Abbildungen)

$$g_t: \mathcal{U}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}^\varepsilon \\ (p, X_p) \mapsto (p, tX_p)$$

Es gilt: (a)  $g_0(\mathcal{U}^\varepsilon) = z_0(Y)$ , d.h.  $g_0 = z_0 \circ \pi_0$

$$g_0: (p, X_p) \xrightarrow{\pi_0} p \xrightarrow{z_0} (p, 0)$$

$$(b) g_1 = \text{id.}$$

$$(c) g_t(z_0(Y)) = z_0(Y) \quad g_t \circ z_0 = z_0 \\ (p, 0) \mapsto (p, 0)$$

$$\text{Homotopie-Formel: } g_1^* \alpha - g_0^* \alpha = \alpha - \pi_0^* \overset{0}{=} z_0^* \alpha = \alpha \\ = dQ\alpha + \underset{0}{Q}d\alpha = dQ\alpha$$

Setze  $\mu = Q\alpha \Rightarrow \alpha = d\mu$ .

(117)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mu|_p = 0, \forall p \in Z(Y)$ , ist:

$X_t$  sei das Vektorfeld zum Fluss  $\beta_t$ . Aus (c) folgt, dass  $X_t|_p = 0, \forall p \in Z(Y)$ . Daher

$$\mu|_p = \int_0^1 \beta_t^* \underbrace{X_t}_{=0} \alpha|_p dt = 0, \forall p \in Z(Y).$$

□

Kor. 3.21: Sei  $Y \xrightarrow{z} U \subset M$  wie oben. Dann gilt

$$H_{dR}^k(U) \cong H_{dR}^k(Y).$$

Bew. 3.21:  $Y \xrightarrow{z} U$  induziert  $z^*: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(Y)$   
und weil  $d \circ z^* = z^* \circ d$ :

$$z^*: H_{dR}^k(U) \rightarrow H_{dR}^k(Y).$$

① Diese Abbildung ist surjektiv ( $Y \xrightarrow{z_0} U^\varepsilon$  verwenden und konstant auf  $U^\varepsilon$  erweitern).

② Die Homotopie-Formel aus Bew 3.20 zeigt, dass sie auch injektiv ist:

"Homotopie-Invarianz der deRham-Kohomologie":

Annahme:  $d\alpha = 0, z_0^* \alpha = d\beta$

$$\begin{aligned} f_1^* \alpha - f_0^* \alpha &= \alpha - \pi_0^* z_0^* \alpha = \alpha - d\pi_0^* \beta \\ &= dQ\alpha + \underbrace{Qd\alpha}_{=0} = dQ\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = d(\pi_0^* \beta + Q\alpha) \quad \square$$

(118)

Mit diesen Vorbereitungen aus der Homotopie-Theorie können wir nun den folgenden, wichtigen Satz aus der symplektischen Geometrie beweisen:

Satz 3.22. (Satz von Moser): Gegeben sei eine diff.

Mfkk  $M$ , eine Untermfkk  $\iota: Y \hookrightarrow M$ , und zwei symplektische Strukturen  $\omega_0$  und  $\omega_1$  auf  $M$  mit  $\omega_0|_p = \omega_1|_p$  für alle  $p \in Y$ . Dann existieren Umgebungen  $\mathcal{U}_0$  und  $\mathcal{U}_1$  von  $Y$  in  $M$  und ein Symplektomorphismus  $\phi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$  (d.h.  $\phi^* \omega_1 = \omega_0$ ), der  $Y$  erhält (d.h.  $\phi \circ \iota = \iota$ ).

Bew. 3.22:

(a)  $(\omega_1 - \omega_0)|_p = 0$ ,  $\forall p \in Y$ , und  $\omega_1 - \omega_0$  ist geschlossen.

Wegen der Homotopie-Formel (Satz 3.20)

existiert eine 1-Form  $\mu$  auf einer Umgebung  $\mathcal{U}_0$  von  $Y$  mit  $\omega_1 - \omega_0 = d\mu$  und  $\mu|_p = 0$ ,  $\forall p \in \iota(Y)$ .

(b) Nun definieren wir eine Familie von symplektischen Strukturen

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + t d\mu, \quad t \in [0, 1].$$

(Damit jedes  $\omega_t$  nicht-entartet ist, muss  $U_0$  passend verkleinert werden.)

Es gilt:  $\frac{d}{dt} \omega_t = d\mu.$

(c) Nun wenden wir Moser's Trick (Lemma 3.17) an und erhalten eine Isotopie  $\phi_t$  zum zeit-abhängigen Vektorfeld  $X_t$  (aus der Lösung von  $i_{X_t} \omega_t + \mu = 0$ ) mit der Eigenschaft

$$\phi_t^* \omega_t = \omega_0$$

Da  $\mu|_Y = 0$  für  $p \in Y$ , gilt auch  $X_t|_Y = 0$  für alle  $t \in [0, 1]$  und daher  $\phi_t|_Y = \text{id}.$

Schließlich setzen wir  $\phi = \phi_1: U_0 \rightarrow U_1 = \phi(U_0).$

$\Rightarrow \phi^* \omega_1 = \omega_0$  und  $\phi|_Y = \text{id}.$  □

## Satz (3.6) von Darboux

Jede symplektische Form  $\omega$  auf einer symplektischen MfLk  $M$  ist lokal (d.h.  $\exists$  Umgebung jedes Punktes) symplektomorph zur symplektischen Standardform  $\omega_{\text{std}} = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ .

Bew 3.6: Satz von Moser für  $Y = p \in M$  (Punkt) anwenden:

Es sei  $U$  eine Umgebung von  $p$ .

Wir wenden zunächst eine lineare symplektische Transformation an, um  $\omega$  im Punkt  $p$  (nicht auf  $U$ !) auf Standardform zu bringen:

$$\tilde{\omega} = \Psi^* \omega \quad \text{auf } U$$

mit  $\tilde{\omega}|_p = \omega_{\text{std}}$ .

Letztere Eigenschaft von  $\tilde{\omega}$  lässt uns den Satz von Moser anwenden: Es existiert ein Symplektomorphismus  $\phi$  mit

$$\phi^* \tilde{\omega} = \omega_{\text{std}} \quad \text{auf } U. \quad \square$$



### 3.3. Umgebungstheoreme

Der Satz von Moser gilt für generische Untermfllken  $Y$  in symplektischen Mfllken  $M$ . Für die speziellen Untermfllken der symplektischen Geometrie, i.e. isotrop, Lagrange, coisotrop, symplektisch (oder im allgemeinsten Fall Untermfllk von konstantem Rang,  $\text{rk}(\omega|_Y) = \text{const.}$  für  $Y \subset M$ ), gelten noch stärkere Aussagen.

Dafür benötigen wir eine Verallgemeinerung des Umgebungssatzes 3.19:

#### Satz 3.23 (Fortsetzungssatz von Whitney)

Gegeben sei eine diff. Mfllk  $M$  und eine Untermfllk  $Y$ .  $U^\varepsilon$  sei eine Umgebung von  $Y$  in  $NY$  wie in Satz 3.19. Weiters sei  $L_p: T_p M \rightarrow T_p M$  für alle  $p \in Y$  ein diff. Isomorphismus. Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $Y$  in  $M$  und ein Diffeomorphismus

$\phi: \mathcal{U}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}$  mit  $\phi(p) = p$  und  $(d\phi)_p = L_p, \forall p \in Y.$

Bem.: Im Umgebungssatz 3.19 ist  $t = L_p = id.$

Bew 3.23: Analog zu 3.19 mit Isotopie induziert durch Geodäten:

$$\begin{array}{ccc}
 \phi: (p, \chi_p) & \longmapsto & \phi_1(p, L_p(\chi_p)) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{U}^\varepsilon & & \mathcal{U} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 NY & & M
 \end{array}
 \quad \square$$

Satz 3.24: (Koisotropes Einbettungstheorem)

Gegeben eine diff. MfLk  $M$  zwei symplektische Strukturen  $\omega_0$  und  $\omega_1$ .  $Y \xrightarrow{\tau} M$  sei eine koisotrope UntermfLk bzgl.  $\omega_0$  und  $\omega_1$ , und  $\tau^* \omega_0 = \tau^* \omega_1$ .

Dann existieren Umgebungen  $\mathcal{U}_0$  und  $\mathcal{U}_1$  von  $Y$  in  $M$  und ein Symplektomorphismus  $\phi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$ , sodass  $\phi \circ \tau = \tau$ .

Bem. 3.25: Falls  $Y$  eine Lagrange UntermfLk ist, d.h.  $\tau^* \omega_0 = \tau^* \omega_1 = 0$ , dann heißt 3.24

Lagranges Einbettungstheorem von Weinstein.

Bem.: Anders als beim Satz von Moser 3.20 muss nur  $\tau^* \omega_0 = \tau^* \omega_1$  (an Stelle von  $\omega_0|_p = \omega_1|_p$ ) vorausgesetzt werden.

Bew. 3.24:  $p \in Y$ ,  $\text{codim } Y = k$ ,  $\dim M = 2n$ ,

$T_p Y \subset T_p M$  ist ein isotroper Unterraum.

↑

Wähle eine Basis für  $T_p Y$ :  $(a_1, \dots, a_{2(n-k)}, c_{2n-2k+1}, \dots, c_{2n})$

wobei  $\text{span}(c_{k+1}, \dots, c_n) = T_p Y^\omega$  ist und

$$z^x \omega_0 = z^x \omega_1 = \sum_{i=1}^{2n-2k} \omega_{ij}(p) a_i^* \wedge a_j^*$$

Diese Basis kann kanonisch zu einer Basis auf  $T_p M$  erweitert werden; Fixiere eine beliebige Metrik  $g$  auf  $M$  bzgl. der wir die Aufspaltung  $T_p M = T_p Y \oplus N_p Y$  haben. Dann:

$$\begin{array}{ccc} T_p Y \omega & \xrightarrow{\omega_{0,1}|_p} & N_p^* Y \xrightarrow{g_p^{-1}} N_p Y \\ c_j & \longmapsto & d_j := (g_p^{-1} \circ \omega_{0,1})(c_j) \end{array}$$

Alle symplektischen Vektorräume sind symplektomorph, d.h. es existiert immer ein Basiswechsel

$$L_p: T_p \Pi \rightarrow T_p M$$

mit  $L_p^* \omega_{1,p} = \omega_{0,p}$ .

Wegen  $z^x \omega_{1,p} = z^x \omega_{0,p}$  gilt auch

$$L_p|_{T_p X} = \text{id}_{T_p X}.$$

Die Erweiterung der Basis um die  $d_j$ 's erfolgte mittels der diff. Abbildung  $g_p^{-1} \circ \omega_{0,1}$ , weshalb

$L_p$  auch diff. ist.

Wegen Whitney's Fortsetzungssatz 3.23 existiert ein Diffeomorphismus  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_1$  mit

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p, \\ d\varphi|_p &= L_p, \end{aligned} \quad \forall p \in Y.$$

Nun gilt:

$$\varphi^* \omega_1|_p = (d\varphi)_p^* \omega_1|_p = L_p^* \omega_1|_p = \omega_0|_p$$

Jetzt kann der Satz von Moser 3.20 für  $\omega_0$  und  $(\varphi^* \omega_1)$  angewendet werden:

$$\begin{array}{ccccc} \phi: \mathcal{U}_0 & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \mathcal{U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}_1 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{aus 3.20} & & \text{aus 3.23} \end{array} \quad \square$$

Das koisotrope Einbettungstheorem besagt, dass eine kleinen Umgebung einer koisotropen Untermannigfaltigkeit  $Y \subset M$  bis auf Diffeomorphismen durch die "intrinsische" Geometrie von  $Y$  (jedoch nicht von  $M$ ) bestimmt ist.

Das folgende Resultat, das auf Weinstein zurückgeht, führt diese "Philosophie" noch weiter:

## Satz 3.26 (Weinstein's Umgebungstheorem)

(125)

Gegeben  $(M, \omega)$  und eine Lagrange Untermflk  $L \hookrightarrow M$ . Weiters sei  $L \xrightarrow{\tau_0} T^*L$  die Einbettung von  $L$  als Nullschnitt in  $(T^*L, \omega_{\text{can}})$ .

Dann existieren Umgebungen  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{U}_0$  von  $L$  in  $M$  bzw.  $T^*L$  und ein Symplektomorphismus  $\phi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}$  (d.h.  $\phi^* \omega = \omega_{\text{can}}$ ) mit  $\phi \circ \tau_0 = \tau$ .

Bem. 3.27: Eine analoge Aussage gilt für koisotrope Untermflken  $Y$ : Eine kleine Umgebung von  $Y$  kann denn durch  $(TY^\omega)^*$  modelliert werden.

Bew. 3.26: Nach dem Umgebungstheorem 3.19 können wir eine kleine Umgebung von  $L$  durch das Normalenbündel  $NL$  beschreiben.

Für Lagrange Untermflk gilt  $TL = TL^\omega$  und der Isomorphismus 2.14

$$\omega_p^b: T_p L \xrightarrow{\cong} N_p^* L$$

kann dualisiert werden:

$$\omega_p^\# : T_p^* L \xrightarrow{\cong} N_p L.$$

$\omega^\#$  induziert einen Diffeomorphismus

(126)

$$g: \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathcal{U}^\varepsilon \longrightarrow \mathcal{U}_2$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ T^*L & & NL \\ & & \uparrow \\ & & M \end{array}$$

mit  $g \circ z_0 = z$ .

Nun sind  $\omega_{\text{can}}$  und  $g^*\omega$  zwei symplektische Strukturen auf  $\mathcal{U}_1 \subset T^*L$  mit  $z_0^*\omega_{\text{can}} = 0 = z_0^*g^*\omega$ , d.h.  $L$  ist für beide Lagrange.

Nun wenden wir das Lagrange

Einbettungstheorem von Weinstein 3.25 an:

$\exists$  Umgebungen  $\mathcal{U}_0$  und  $\mathcal{U}_0'$  in  $\mathcal{U}_1$ , und ein Diffeomorphismus  $\psi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_0'$  mit

$$\psi^*(g^*\omega) = \omega_{\text{can}} \quad \text{und} \quad \psi \circ z_0 = z_0.$$

Nun setze:

$$\phi = g \circ \psi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \phi(\mathcal{U}_0) =: \mathcal{U}$$

$$\phi \circ z_0 = g \circ \psi \circ z_0 = g \circ z_0 = z$$

□

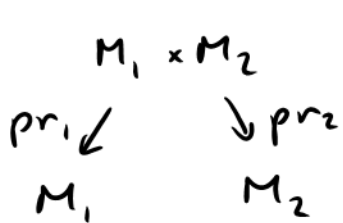
### 3.4. Methode der erzeugenden Funktion

(127)

Hier beschäftigen wir uns mit der Frage wie Symplektomorphismen im Fall des Kotangentenbündels konstruiert werden können.

Erinnerung:

(1) Prop. 3.5:



$$\tilde{\omega} = \text{pr}_1^* \omega_1 - \text{pr}_2^* \omega_2$$

$\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  ... Diffeomorphismus

$\varphi$  ist ein Symplektomorphismus

$\Leftrightarrow \Gamma_\varphi = \{(p, \varphi(p))\} \subset M_1 \times M_2$  ist Lagrange

(2) Prop. 2.28:

$$M = T^*X, \quad \alpha \in \Omega^1(X)$$

$\alpha$  geschlossen  $\Leftrightarrow \Gamma_\alpha = \{(q, \alpha_q)\} \subset T^*X$  ist Lagrange

Nun kombinieren wir diese beiden Ergebnisse:

Sei  $M_1 = T^*X_1$ ,  $M_2 = T^*X_2$  und  $S(\neq 0) \in \mathcal{F}(X_1 \times X_2)$ .

Dann ist  $dS$  geschlossen auf  $X_1 \times X_2$ , und dessen Graph

$$Y_S = \{ (q_1, q_2, (dS)_{(q_1, q_2)}) \mid (q_1, q_2) \in X_1 \times X_2 \}$$

definiert nach Prop. 2.29 eine Lagrange Untermfлк von  $M_1 \times M_2$  mit  $\omega = \text{pr}_1^* \omega_{\text{can}, 1} + \text{pr}_2^* \omega_{\text{can}, 2}$ .

Schreiben wir  $dS = d_1 S + d_2 S$ , dann ist  
( $d_1, d_2$  - Operatoren auf  $X_1$  und  $X_2$ )

$$\tilde{Y}_S = \{ (q_1, q_2, (d_1 S)_{q_1}, -(d_2 S)_{q_2}) \mid (q_1, q_2) \in X_1 \times X_2 \}$$

eine Lagrange Untermfлк von  $M_1 \times M_2$  mit  $\tilde{\omega}$  als symplektische Struktur.

Def. 3.28: Gegeben  $M_1 = T^*X_1$ ,  $M_2 = T^*X_2$  und  $S: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $\tilde{Y}_S$  wie oben.

Wenn  $\tilde{Y}_S$  der Graph eines Diffeomorphismus  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  (und damit nach Prop. 3.5 eines Symplektomorphismus) ist, dann heißt  $S$  die erzeugende Funktion von  $\varphi$ .

Wir sagen,  $\varphi$  wird durch  $S$  erzeugt.



Frage: Wann ist  $\tilde{Y}_S$  der Graph eines Symplektomorphismus? (129)

Kerten:

$$(U_1 \subset X_1, x_1, \dots, x_m) \quad (U_2 \subset X_2, y_1, \dots, y_m)$$

$$(T^*U_1, x_1, \dots, x_m, \xi_1, \dots, \xi_m) \quad (T^*U_2, y_1, \dots, y_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$$

Prop. 3.29:

$$\tilde{Y}_S = \{(x, y, d_x S, -d_y S) \mid (x, y) \in X_1 \times X_2\} \text{ ist}$$

der Graph eines Symplektomorphismus  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ ,

falls  $\forall (x, \xi) \in T^*X_1, (y, \eta) \in T^*X_2$  gilt:

$$\varphi(x, \xi) = (y, \eta) \Leftrightarrow \xi = d_x S, \eta = -d_y S.$$

Lokal kann obige Frage daher wie folgt beantwortet werden:

$$(a) \quad \xi_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}(x, y) \quad i, j = 1, \dots, m$$

$$(b) \quad \eta_j = -\frac{\partial S}{\partial y_j}(x, y)$$

Nach Prop. 3.29 müssen wir eine Lösung zu (a)

finden:  $y_j = \varphi_{1,j}(x, \xi).$

Diese dann in (b) einsetzen:

(130)

$$\eta_j = \varphi_{2,j}(x, \xi) := - \frac{\partial S}{\partial y_j}(x, \varphi_1(x, \xi))$$

Das gibt den Symplektomorphismus  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Ein Lösung zu (a) existiert nach dem Satz über implizite Funktionen lokal genau dann wenn

$$\det \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n} (x, y) \neq 0.$$

Übungsaufgabe 23:  $X_1 \cong \mathbb{R}^n \cong X_2$  und die erzeugende Funktion sei  $S(x, y) = -\frac{1}{2} |x-y|^2$ . Bestimme den zugehörigen Symplektomorphismus.

Bem. 3.30: Wenn  $\varphi: T^*X \rightarrow T^*X$ ,  $\varphi(x_0, \xi_0) = (x_1, \xi_1)$  eine Hamiltonsche

Transformation ist ( $\exists$  Hamiltonsche Isotopie  $\varphi_t$  mit zeit-abhängiger Hamiltonscher Funktion  $H_t$  und  $\varphi_0 = \text{id}$ ,  $\varphi_1 = \varphi$ ), dann wird durch die Wirkung

$$S_H[y] = \int_0^1 y^* \lambda_{\text{can}} - H_t(y) dt$$

eine generierende Funktion definiert,

falls ein diff. Weg  $\gamma: [0,1] \rightarrow T^*X$  (13)  
 existiert, der eine eindeutige Lösung  
 der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial H_\epsilon}{\partial x_i} \quad \dot{x}_i = -\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \xi_i} \quad (*)$$

mit Randbedingungen

$$x_i(0) = x_{0,i} \quad , \quad x_i(1) = x_{1,i} .$$

Dieser eindeutige Weg  $\gamma = \gamma_{x_0, x_1}$  definiert eine diff.  
 Abbildung  $U \subset X \times X \rightarrow C^\infty([0,1], T^*X)$ ,  
 $(x_0, x_1) \mapsto \gamma_{x_0, x_1}$ .

**Lemma 3.31**  $S_H(x_0, x_1) := S_H[\gamma_{x_0, x_1}]$  ist eine  
 generierende Funktion für die  
 Hamiltonsche Transformation  $\varphi$ .

**Bew 3.31:**  $\gamma_s(t) = (x_s(t), \xi_s(t))$  mit kleinem  $s \in \mathbb{R}$   
 sei eine Familie von Lösungen von (\*)  
 mit Randbedingungen

$$x_s(0,1)|_{s=0} = x_{0,1} \quad , \quad \frac{\partial x_s}{\partial s}(0,1)|_{s=0} = \tilde{x}_{0,1}$$

für fixes  $\tilde{x}_{0,1} \in T_{x_{0,1}}X$ .

Dann gilt

$$\frac{d}{ds} S_H(x_s(0), x_s(1)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} S_H[\gamma_s] \Big|_{s=0}$$

" ← vgl. Lemma 0.9

$$\frac{\partial S_H}{\partial x_0} \tilde{x}_0 + \frac{\partial S_H}{\partial x_1} \tilde{x}_1 = \xi_1 \cdot \tilde{x}_1 - \xi_0 \cdot \tilde{x}_0$$

für alle  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \Rightarrow$

$$\xi_1 = \frac{\partial S_H}{\partial x_1}, \quad \xi_0 = -\frac{\partial S_H}{\partial x_0}$$

$\Rightarrow S_H$  ist eine generierende Funktion.  $\square$