

## 4. Integrierte Systeme

(133)

Def. 4.1: Ein Hamiltonsches System  $(M, \omega, H)$  ist eine symplektische Mfkk  $(M, \omega)$  zusammen mit einer Funktion  $H \in \mathcal{F}(M)$ , die Hamiltonsche Funktion genannt wird. Eine Funktion  $f \in \mathcal{F}(M)$ , die mit  $H$  Poisson-kommutiert,  $\{H, f\} = 0$ , heißt Erhaltungsgröße.

Bem.:  $\phi_t^H$  sei der Hamiltonsche Fluß zu  $H$ :

$$\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H = df \left( \frac{d\phi_t^H}{dt} \right) = df(X_H)_{\phi_t^H} = \{H, f\} = 0.$$

Def. 4.2:  $(M, \omega, H)$  mit  $\dim M = 2n$  heißt

(komplett oder Liouville) integrierbar,

falls  $n$  Poisson-kommutierende

Erhaltungsgrößen  $f_i \in \mathcal{F}(M)$  für  $i=1, \dots, n$

existieren, die unabhängig sind

(d.h.  $\forall p \in U$ ,  $U$  offen und dicht in  $M$ , sind

$df_1, \dots, df_n$  linear unabhängig)

Def. 4.3: Ein Punkt  $c \in \mathbb{R}^n$  heißt regulärer Wert von  $f := (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , falls an jedem Punkt  $p$  auf der Niveaumenge  $M_c := f^{-1}(c)$  die Differentiale  $df_1, \dots, df_n$  lin. unabhängig sind.

- Bem.: • Da die maximale Anzahl Poisson-komm. Funktionen gleich  $n = \frac{1}{2} \dim M$  ist (Bem. 2.22), ist  $M = M(f_1, \dots, f_n)$ .
- Nach Satz 2.21 sind die Niveaumengen  $M_c$  für reguläre Werte  $c$  Lagrange Untermf(ken). Der folgende Satz verstärkt diese Aussage:

Satz 4.4: Gegeben  $(M, \omega)$  und  $n$  Poisson-kommutierende Funktionen  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(M)$ .  $c \in \mathbb{R}^n$  sei ein regulärer Wert und die Flüsse von  $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$  seien auf  $M_c$  komplett (d.h.  $\text{genz } \mathbb{R}$  wird nach  $M_c$  abgebildet). Dann ist jede Zusammenhangskomponente von  $M_c$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$  für ein  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , wobei  $T^k$  der  $k$ -dim. Torus ist.

Bem. 4.5: Eine kompakte Zusammenhangskomponente ist diffeomorph zu  $T^n$  und heißt Liouville-Torus.

Für den Beweis von Satz 4.4. benötigen wir noch einen Nachtrag zu Kap. 2.5 über Flüsse von Vektorfeldern:

Gegeben seien zwei Vektorfelder  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  mit zugehörigen Flüssen  $\phi_t^X, \phi_s^Y$ . Dann gilt:

$$[X, Y] = 0 \iff \phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X.$$

Beweis:

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y = 0 \Rightarrow$$

$$(a) \frac{d}{dt} (\phi_{-t}^X)_* Y_{\phi_t^X(p)} = \frac{d}{dt'} (\phi_{-t}^X)_* (\phi_{-t'}^X)_* Y_{\phi_{t'+t}^X \circ \phi_t^X} \Big|_{t'=0} \stackrel{\text{def. } \mathcal{L}_X}{=} = \phi_{-t}^X_* \mathcal{L}_X Y_{\phi_t^X} = 0$$

$$\Rightarrow \text{mit } \phi_0^X = \text{id} : (\phi_{-t}^X)_* Y_{\phi_t^X(p)} = Y_p$$

$$\underline{Y_{\phi_t^X(p)} = (\phi_t^X)_* Y_p}$$

$$(b) \frac{d}{ds} \phi_t^X \circ \phi_s^Y = (\phi_t^X \circ \phi_s^Y)_* \left( \frac{d}{ds} \right) = (\phi_t^X)_* \frac{d}{ds} \phi_s^Y =$$

$$= (\phi_t^X)_* Y_{g_s^Y} = Y_{\phi_t^X \circ g_s^Y}$$

$\Rightarrow \phi_t^X \circ g_s^Y$  ist ein Fluss für  $Y$  mit

$$\text{Anfangswert } \phi_t^X \circ g_s^Y(p)|_{s=0} = \phi_t^X(p)$$

Andererseits ist  $g_s^Y \circ \phi_t^X$  ebenfalls ein Fluss für  $Y$  mit diesem Anfangswert  $\Rightarrow$

$$\phi_t^X \circ g_s^Y = g_s^Y \circ \phi_t^X. \quad \square$$

Beweis 4.4: Die Hamiltonschen Vektorfelder zu  $f_1, \dots, f_n$  kommutieren

$$[X_{f_i}, X_{f_j}] = X_{\{f_i, f_j\}} = 0$$

$\Rightarrow$  Die zugehörigen Flüsse

$$\phi_{t_i}^i: M_c \rightarrow M_c \text{ für } t_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, n$$

kommutieren.

Daher definiert

$$\phi_t: M_c \rightarrow M_c \quad \phi_t := \phi_{t_1} \circ \dots \circ \phi_{t_n}$$

$$t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

eine Wirkung der kommutierenden

Gruppe  $\mathbb{R}^n$  auf  $M_c$ ,  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$

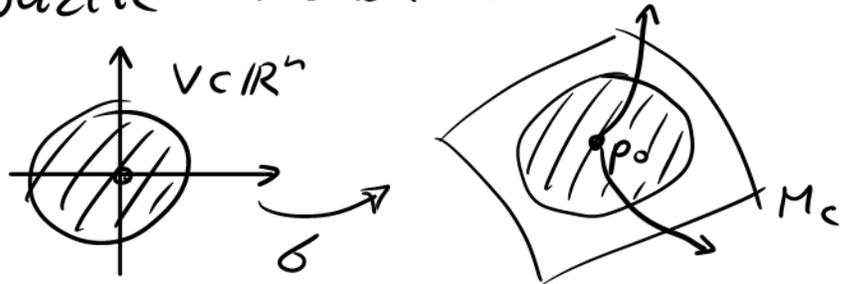
für  $t, s \in \mathbb{R}^n$ .

Fixiere einen Punkt  $p_0 \in M_c$  und setze

$$\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow M_c,$$

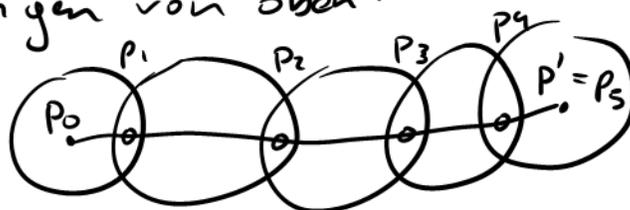
$$t \mapsto \sigma_t(p_0).$$

$\sigma$  definiert eine Karte in einer Umgebung von  $p_0$ , die klein genug ist: Da  $\frac{d}{dt} \sigma = (X_{f_i})_\sigma$  in jedem Punkt linear-unabhängig sind, ist  $p = \sigma_t(p_0)$  nach dem Satz über implizite Funktionen nach  $t$  auflösbar.



Weiters ist die Wirkung von  $\mathbb{R}^n$  auf jeder Zusammenhangskomponente  $M_c^p$  eines Punktes  $p \in M_c$  transitiv, d.h.  $\forall p_0 \in M_c^p$  ist  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow M_c^p, t \mapsto \sigma_t(p_0)$  surjektiv: Für  $p' \in M_c^p$  wähle einen Weg von  $p_0$  nach  $p'$  und überdecke ihn mit endlich vielen

Umgebungen von oben:



$t \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $G(t) = p'$  ist dann die Summe der Verschiebungen  $t_i, i=1, \dots, 5$ .

$G: \mathbb{R}^n \rightarrow M_c^p$  ist aber im Allgemeinen nicht injektiv:

Für einen Punkt  $p_0 \in M_c^p$  sei  $\Gamma$  die Untermenge von  $\mathbb{R}^n$ , die  $p_0$  erhält:

$$\Gamma = \{ t \in \mathbb{R}^n \mid G_t(p_0) = p_0 \}$$

$\Gamma$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{R}^n$ :

$$\text{für } t, s \in \Gamma : G_{t+s}(p_0) = G_t \circ G_s(p_0) = p_0 \Rightarrow t+s \in \Gamma$$

$\Gamma$  ist unabhängig vom Basispunkt  $p_0$ :

Wähle  $p \neq p_0$  mit  $p = G_t(p_0)$

$$s \in \Gamma : G_s(p) = G_s \circ G_t(p_0) = G_t \circ G_s(p_0) = G_t(p_0) = p$$

$\Gamma$  ist eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}^n$ :

$\Gamma$  nicht diskret wäre im Widerspruch zur Beobachtung, dass  $G$  lokal ein Diffeomorphismus ist.

Diskrete Untergruppen  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  sind isomorph zu  $\mathbb{Z}^k$  für ein  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Damit erhalten wir folgende Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad G \quad} & M_c^p \\
& & & & t & \longmapsto & G_t(p_0)
\end{array}$$

mit  $G_0(\Gamma) = p_0$  und daher ist

$$G: \mathbb{R}^n / \Gamma \xrightarrow{\cong} M_c^P$$

$$(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k \cong \mathbb{R}^{n-k} \times T^k)$$

ein Diffeomorphismus.

Falls  $M_c^P$  kompakt ist, ist notwendig  $k=n$ ,  $M_c^P \cong T^n$ .  $\square$

In Satz 2.21 und nachfolgender Bem. 2.22(c) wurde gezeigt, dass  $M_c$  nicht nur eine Lagrange Untermf'lk ist, sondern ein Blatt in einer Blätterung:

$c \in \mathbb{R}^n$  sei ein regulärer Wert. Dann existiert (wegen Stetigkeit von  $f$  und  $df$ )

eine Umgebung  $B \subset \mathbb{R}^n$  von  $c$ , in der jeder Punkt ein regulärer Wert für  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist. Das Urbild  $f^{-1}(B)$  ist eine Umgebung von  $M_c \subset M$ .

Der Satz von Arnold-Liouville konstruiert ausgezeichnete Koordinaten für  $f^{-1}(B)$ , die

Wirkungs-Winkel-Koordinaten:

### Satz 4.5 (Satz von Arnold-Liouville)

$(M, \omega, H)$  sei ein integrables System mit Erhaltungsgrößen  $f_1 = H, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}(M)$ .

$c \in \mathbb{R}^n$  sei ein regulärer Wert von  $f := (f_1, \dots, f_n)$ , und  $B$  eine Umgebung von  $c$  mit regulären Werten.

(a) Falls die Hamiltonschen Flüsse zu  $f_1, \dots, f_n$  auf einer Zusammenhangskomponente

$M_c^P \subset M_c = f^{-1}(c)$  komplett sind, dann existieren auf  $M_c^P$  Winkelkoordinaten

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  mit  $\varphi_i \cong \varphi_i + 2\pi$  für  $i = 1, \dots, k$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Die Flüsse der Hamiltonschen Vektorfelder  $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$  sind linear in den Winkelkoord.,

d.h. 
$$X_{f_a} = \sum_{i=1}^n \omega_i^a(c) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \quad a = 1, \dots, n$$

und 
$$\varphi_i(t_1, \dots, t_n) = \sum_{a=1}^n \omega_i^a(c) t_a + (\varphi_0)_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

(b) Die Umgebung  $M_B^P \subset M_B = f^{-1}(B)$  von  $M_c^P$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k \times B$ , und falls  $M_c^P$  kompakt ist, dann existieren Wirkungskoordinaten  $(I_1, \dots, I_n)$ ,

sodass die symplektische Struktur  $\omega$

(141)

Standardform annimmt:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dI_i.$$

Bew. 4.5.: o.B.d.A. nehmen wir an, dass  $M_c$  zusammenhängend ist.

(a) Im Beweis von 4.4. wurden Koordinaten für  $M_c$  aus den Flüssen  $\phi_{t_1}^1, \dots, \phi_{t_n}^n$  für  $X_{f_1}, \dots, X_{f_n}$  konstruiert:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}^n / \Gamma &\xrightarrow{\cong} M_c, \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \phi_t(p_0). \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten ist  $X_{f_a} = \frac{\partial}{\partial t_a}$ .

Um die Winkelkoordinaten  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  zu erhalten, verwenden wir eine Basis transformation auf  $\mathbb{R}^n$ :

$e_1, \dots, e_k$  seien  $k$  lin. unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ , die  $\Gamma \cong \mathbb{Z}^k$  erzeugen, d.h.

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^k 2\pi m_i e_i \in \mathbb{R}^n \mid (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^k \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Nun wählen wir eine Basis transformation zu einer Basis, die  $e_1, \dots, e_k$  enthält und die

Koordinaten  $(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n)$  hat:

$$\varphi_i = \sum_{a=1}^n \omega_i^a(c) t_a + \text{const.}$$

$\uparrow$   
 $z: \Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $c$ -abhängig.

Dann gilt:

$$\phi_c: \left( \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \right)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\cong} M_c$$

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \longmapsto \mathcal{O}_{\tilde{\omega}^{-1}(\varphi)}(p_0)$$

mit  $\varphi_i \cong \varphi_i + 2\pi$ ,  $i=1, \dots, k$ .

Die Hamiltonschen Vektorfelder sind

$$X_{\varphi_c} = \frac{\partial}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^n \omega_i^a(c) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$$

(b) o.B.d.A. können wir  $c=0$  setzen:  $f_i \rightarrow f_i - c_i$ .

$\mathcal{U}$  sei eine Umgebung von  $M_0$ , sodass  $f(\mathcal{U}) = B(\exists 0)$ .

$$\mathcal{U} \xrightarrow{\cong} \left( \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \right)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times \overset{\mathbb{R}^n}{\cup} B$$

$$\overset{\psi}{p} \longmapsto (\varphi = \phi_c^{-1}(p), c = f(p))$$

ist ein Diffeomorphismus.

(143)

Demit sind  $(q, c)$  Koordinaten auf  $U$ , allerdings nicht in Standardform.

Wir vergessen nun die Konstruktion der Winkelkoordinaten aus (a) und geben eine unabhängige Konstruktion der Wirkungs-Winkel-Koordinaten an!

$M_c$  sei von nun an kompakt ( $M_c \cong \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n$ ).

Zunächst erinnern wir uns, dass nach Weinstein's Umgebungstheorem (Satz 3.26) eine Umgebung von  $M_0$  existiert, die durch

Umgebung von  $M_0$  existiert, die durch

$$T^*M_0 \cong T^*\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n \cong \mathbb{R}^n \times \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n$$

mit kanonischer 1-Form  $\lambda_{\text{can}} = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$

modelliert wird. Die Blätter  $M_c$  der Blätterung

sind Graphen von geschlossenen 1-Formen  $\alpha_c \in \Omega^1(M_0)$ ,

$$M_c = \{(q, \alpha_c|_q) \in T^*M_0 \mid q \in M_0\} \subset T^*M_0.$$

Wählen wir die Winkelkoordinaten  $(q_1, \dots, q_n)$  auf  $M_0$ , so sind die Wirkungs koordinaten  $(I_1, \dots, I_n)$  die dazu dualen Koordinaten auf den

# Kotangentialräumen.

Wie können wir die Koordinaten  $(\varphi, \mathbb{I})$  konstruieren?

Wir suchen nach einem Symplektomorphismus

$$\phi: \underbrace{U_0}_{\hat{T}^*M_0} \longrightarrow \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^n \times B$$

$$(q, p) \longmapsto (\varphi(q, p), \mathbb{I}(q, p))$$

mit (1)  $\phi^* \left( \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dI_i \right) = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i = \omega_{can}.$

(2)  $\mathbb{I}(q, p)$  soll nur von  $f_i(q, p)$  abhängen

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}(f(q, p)) = \mathbb{I}(c).$$

(3) Die geschlossenen Wege

$\gamma_i: S^1 \longrightarrow M_c, i=1, \dots, n,$  seien eine Basis von 1-Zykel auf dem Torus  $M_c.$

Dann gelte:

$$\int_{\gamma_i} d\varphi_j(q, p) = 2\pi \delta_{ij}.$$



Wir wenden die Methode der erzeugenden Funktion  $S$  an: Wir suchen eine Funktion  $S = S(I, q)$  auf  $U_0$ , sodass

$$(i) p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(I, q), \quad (ii) \varphi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}(I, q).$$

↓  
auflösen nach  $I$   
 $\Rightarrow I = I(p, q)$

$$\rightarrow \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}(I(p, q), q) =: \varphi(p, q)$$

$S$  induziert einen Symplektomorphismus:

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial I_i} dI_i = \sum_{(i),(j)} p_i dq_i + \varphi_i dI_i$$

$$d^2S = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dI_i \Rightarrow (1) \checkmark$$

Wir definieren  $S$  durch Integration von Glg (i) entlang eines Weges  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M_c \subset T^*M_0$ . Da  $M_c$  der Graph einer 1-Form  $\alpha_c$  ist gilt

$$\gamma: [0, 1] \xrightarrow{\bar{\gamma}} \pi_0 \xleftarrow{\alpha_c} T^*M_0.$$

mit  $\bar{\gamma}(0) = q_0, \bar{\gamma}(1) = q$ .

Somit:

$$S = \int_{\gamma} \lambda_{can} = \int_{\bar{\gamma}} \alpha_c^* \lambda_{can} = \int_{\bar{\gamma}} \alpha_c.$$

$S$  ist unabhängig vom Weg:



$$\int_{\gamma} \lambda_{can} - \int_{\gamma'} \lambda_{can} = \int_{(-\gamma') \circ \gamma} \lambda_{can} = \int_{\partial D} \lambda_{can} = \int_D d\lambda_{can}$$

↑  
Stokes

$$= - \int_D \omega_{can} = 0$$

$D \subset M_c \dots$  Lagrange

Wir schreiben:

$$S(c, q) = \int_{q_0}^q \alpha_c = \int_{q_0}^q \sum_{i=1}^n p_i(c, q) dq_i$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \checkmark$$

Die Wirkungskoordinaten werden nun definiert

als:

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \lambda_{con} = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\gamma}_i} \alpha_c$$

↳ Basis wie oben



Diese hängen somit nicht von den Koordinaten auf  $M_c$ , d.h. von  $q$ , ab, sondern nur von  $c \Rightarrow I = I(c)$  (2)  $\checkmark$

Wir nehmen an  $I(c)$  sei invertierbar auf  $\mathcal{U}$ . (197)

Dann schreiben wir:

$$S(I, q) (= S(c(I, q))) = \int_{q_0}^q \alpha_I = \int_{q_0}^q \sum_{i=1}^n p_i(I, q) dq_i$$

Die Winkelkoordinaten definieren wir als:

$$\varphi_i := \frac{\partial S}{\partial I_i}(I, q)$$

Sie haben folgende Eigenschaft:

$$\int_{\gamma_j} d\varphi_i = \int_{\gamma_j} d \frac{\partial S}{\partial I_i}(I, q) = \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{\gamma_j} dS(I, q)$$

$\uparrow$   
 $I$  ist konstant  
entlang von  $\gamma_j$

Andererseits gilt

$$\int_{\gamma_j} dS(I, q) = \int_{\gamma_j} d \int_{q_0}^q \alpha_I = \int_{\gamma_j} \alpha_I \stackrel{\text{per def.}}{=} 2\pi I_j$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_j} d\varphi_i = \frac{\partial}{\partial I_i} 2\pi I_j = 2\pi \delta_{ij} \Rightarrow (3) \checkmark$$

Damit induziert die generierende Funktion  $S(I, q)$  den gewünschten Symplektomorphismus.  $\square$

Kor. 4.6. Ein integrables Hamiltonsches System ist durch Quadratur lösbar. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zur Hamiltonschen Funktion  $H = H(p_1, \dots, p_n)$  haben eine lineare Lösung in den Wirkungs-Winkel(-Koordinaten:

$$\varphi_i(t) = \omega_i^H t + \varphi_i(0), \quad I_i(t) = I_i(0).$$

Bew. 4.6: Zur Konstruktion der Wirkungs-Winkel-Koordinaten würde nur Integration (Def. von  $S, I_i$ ) und algebraische Operationen (Invertieren von  $I(c)$ ) verwendet.  
 $\Rightarrow$  Quadratur!

Die Hamiltonschen Flussglg.  $\frac{d\delta_\epsilon}{dt} = (X_H)_{\delta_\epsilon}$  sind in den Wirkungs-Winkel(-Koordinaten gegeben durch  $\omega = d\varphi \wedge dI$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dI_i}{dt} &= \frac{\partial H(I)}{\partial \varphi_i} = 0 \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial I_i}(I) =: \omega_i^H = \text{const} \quad \square \end{aligned}$$

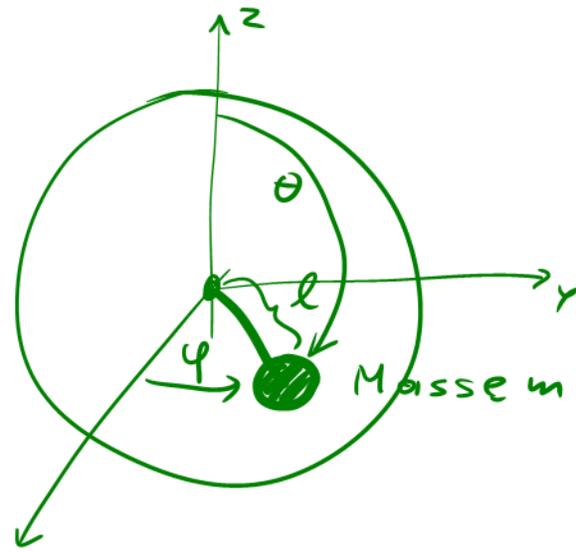
# Übungsaufgabe 24: Das sphärische Pendel:

kinetische Energie:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Potential (Erdschwerkraft):

$$V = m \cdot g \cdot z$$



$$\begin{aligned} x &= l \sin\theta \cos\varphi \\ y &= l \sin\theta \sin\varphi \\ z &= l \cos\theta \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

(a) Bestimme die Lagrangefunktion in Winkelkoordinaten:

$$L(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) = K - V.$$

(b) Bestimme die zugehörige Hamiltonsche Funktion auf  $(T^*S^2, \omega)$  mittels der Legendre-Transformation  $(TS^2 \rightarrow T^*S^2)$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}, \quad P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$H(\varphi, \theta, P_\varphi, P_\theta) = P_\varphi \dot{\varphi} + P_\theta \dot{\theta} - L \Big|_{\substack{\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi, \theta, P_\varphi, P_\theta) \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}(\varphi, \theta, P_\varphi, P_\theta)}}$$

Die kanonische symplektische Struktur ist  $\omega = d\varphi \wedge dP_\varphi + d\theta \wedge dP_\theta$ .

(Achtung: In Kugelkoordinaten ist  $H$  am Nord- und Südpol ( $\theta = 0$  und  $\pi$ ) singulär. Mit Kugelkoordinaten kann  $TS^2$  und  $T^*S^2$  nur auf  $S^2 - \{N, S\}$  parametrisiert werden.)

(c) Zeige, dass  $(T^*S^2, \omega, H)$  ein integrables System ist, mit unabhängiger Erhaltungsgröße

$$J(\varphi, \theta, p_\varphi, p_\theta) = p_\varphi.$$

(d) Bestimme alle Punkte  $p \in T^*S^2$  (ohne  $N, S$ ) auf denen  $dH_p, dJ_p$  linear unabhängig sind:

(i) Für jeden Punkt  $q \in S^2$  mit  $z < 0$  (südliche Hemisphäre) existieren genau zwei Punkte  $p_+, p_-$  auf  $T^*S^2$  (mit  $\pi(p_\pm) = q$ ), sodass  $dH_{p_\pm}$  und  $dJ_{p_\pm}$  linear unabhängig sind.

Bestimme diese.

(ii) Zeige, dass  $dH_p, dJ_p$  entlang des Hamiltonschen Flusses zu  $H$  durch  $p_+, p_-$  linear abhängig sind. (Die Flüsse von  $J$  und  $H$  stimmen überein.)

Wie sieht die zugehörige Bewegung auf der Sphäre aus?

(iii) Zeige, dass für  $j \neq 0$ , die Niveaumenge (151)  
 $\{(H, J) = (h, j)\}$  der Abbildung  $(H, J): T^*S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
entweder ein Kreis oder ein Torus ist.