5. Gruppenwirkungen und symplektische Reduktion

Wir hatten bereits gesehen, dass jede Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ auf einer symplektischen Mfk (M, ω) einen Hamiltonschen Fluss σ_t induziert:

$$f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow X_f \in \mathfrak{X}_{ham}(M) \text{ mit } \iota_{X_f}\omega = df$$

$$\Rightarrow \sigma : \mathbb{R} \times M \to M \quad \text{mit} \quad \frac{d\sigma_t}{dt} = (X_f)_{\sigma_t}$$
$$(t, p) \mapsto \sigma(t,p) = \sigma_t(p)$$

Der Fluß σ_t definiert eine Wirkung der Gruppe $\mathbb{R}$ (oder S^1, falls $\sigma_t = \sigma_{t+T}$, $T \in \mathbb{R}$) auf M, d.h. einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \longrightarrow Ham(M, \omega) \subset Diff(M),$$
$$t \longmapsto \sigma_t .$$

Beim Betrachten der integrablen Systeme hat sich gezeigt, dass k Funktionen in Involution, $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}(M)$, $0 \leq k \leq n = \frac{1}{2}\dim M$, einen Gruppenhomomorphismus induzieren:

$$\mathbb{R}^k \longrightarrow Sympl(M, \omega) \subset Diff(M),$$
$$t_1 \dots t_k \longmapsto \sigma_t = \sigma^1_{t_1} \circ \dots \circ \sigma^k_{t_k} .$$

Da die Gruppenwirkung durch Funktionen induziert wird spricht man von Hamiltonschen Wirkung.

Hier wollen wir studieren, wie sich "Hamiltonsche Wirkungen" auf allgemeine Lie-Gruppen verallgemeinern lassen. Was übernimmt die Rolle der Hamiltonschen Funktion, die die Wirkung induziert?

5.1 Lie-Gruppen, Lie-Algebren

Def. 5.1: Eine <u>Lie-Gruppe</u> ist eine diff. Mflk G, die mit einer Gruppenstruktur ausgestattet ist:

1. $G \times G \to G$ ... differenzierbar
   $(a, b) \mapsto a \cdot b$
2. $\exists$ Eins-Element $e \in G$
3. $G \to G$ ... differenzierbar
   $a \mapsto a^{-1}$

Bsp 5.2.:

(a) $(\mathbb{R}, +)$

(b) $S^1 = U(1)$ als Einheitskreis in $\mathbb{C}$ mit Multiplikation

(c) $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$

(d) $O(n)$ ... orthogonale, lineare Transf. von $\mathbb{R}^n$

$SO(n)$ .... — " —

mit det $= 1$

(e) $U(n)$ ... unitäre, lineare Transf. von $\mathbb{C}^n$

$SU(n)$ ... mit det $= 1$

Def 5.3.: Ein <u>Darstellung</u> einer Lie-Gruppe G auf einem Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho: G \longrightarrow GL(V)$.

Def. 5.4.: Eine Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer diff. Mfck M ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho: G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M),$$
$$g \longmapsto \rho_g = \rho(g).$$

Die <u>Auswertungsabbildung</u> von ρ ist

$$ev_\rho: G \times M \to M,$$
$$(g, p) \longmapsto \rho_g(p).$$

Die Wirkung heißt differenzierbar (C^∞), falls

ev_g differenzierbar ist.

Bsp.: Wenn X ein komplettes Vektorfeld auf M ist, dann ist der zugehörige Fluss $\varrho: \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ eine diff. Wirkung.

Eine Lie-Gruppe kann auf sich selbst wirken:

Def. 5.5: G sei eine Lie-Gruppe. Gegeben sei die Wirkung $\ell: G \longrightarrow \mathrm{Diff}(G)$, $g \longmapsto \ell_g$, mit

$$\ell_g: G \longrightarrow G,$$
$$a \longmapsto g \cdot a.$$

Dann heißt ℓ_g <u>Links-Multiplikation</u> durch g.
(Analog: <u>Rechts-Multiplikation</u> $r_g: a \to a \cdot g$)

Def. 5.6: Ein Vektorfeld X auf G heißt <u>Links-invariant</u>, falls $(\ell_g)_* X = X$ für alle $g \in G$.
Die Menge aller Links-invarianten Vektorfelder sei $\underline{\mathfrak{X}_L(M)}$.

Bem. 5.7: $\mathfrak{X}_L(M)$ ist abgeschlossen bzgl. der Lie-Klammer von Vektorfeldern, d.h. $X, Y \in \mathfrak{X}_L(M) \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{X}_L(M)$.

$$(\ell_g)_*[X,Y] = [(\ell_g)_* X, (\ell_g)_* Y] = [X,Y] \qquad \square$$

Lemma 5.8: Die Abbildung $\mathfrak{X}_L(M) \xrightarrow{\cong} T_eM$, $X \mapsto X_e$, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Bew. 5.8: Aus $X_e \in T_eM$ kann ein Vektorfeld X durch

$$X_g := (l_g)_* X_e$$

definiert werden. X ist links-invariant wegen

$(l_h)_* (l_g)_* = (l_{hg})_*$. $\square$

Durch diesen Isomorphismus wird auf T_eM eine Lie-Algebra-Struktur induziert:

Def. 5.9: $\underline{\mathfrak{g} := T_eG}$ heißt <u>Lie-Algebra der Lie-Gruppe G</u>. Die Lie-Klammer ist definiert durch: $X_e, Y_e \in \mathfrak{g}$

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]|_e \in \mathfrak{g}.$$

Bsp. 5.10: G sei die Matrix-Lie-Algebra $GL(n, \mathbb{R})$.

$g \in GL(n,\mathbb{R})$ sind Matrizen mit Einträgen g_{ij}, $i,j = 1, \dots, n$.

$\det g = 0$.

Vektorfelder: $\quad X = \sum_{i,j} X_{ij}(g) \frac{\partial}{\partial g_{ij}}$

Links-invariante Vektorfelder:

$$X = \sum_{i,j} X_{ij}(ag) \frac{\partial}{\partial (ag)_{ij}} = \sum_{i,j} (l_{a*} X)_{ij}(ag) \frac{\partial}{\partial (ag)_{ij}}$$

$$= \sum_{l,m,i,j} X_{lm}(g) \frac{\partial (ag)_{ij}}{\partial g_{lm}} \frac{\partial}{\partial (ag)_{ij}} = \sum_{l,j,i} X_{lj}(g)\, a_{il} \frac{\partial}{\partial (ag)_{ij}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X(ag) = a \cdot X(g)} \qquad \text{(Matrixmultiplik.)}$$

$$\underline{X(a) = a \cdot X(e) = a \cdot X_e} \qquad (*)$$

Wie sieht die Lie-Klammer aus Def. 5.9 aus?

$$\mathfrak{g} = T_e GL(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}_L(GL(n,\mathbb{R}))$$

$$X_e \qquad\qquad X(g) = g \cdot X_e$$

$$[X_e, Y_e] = [X, Y]_e =$$

$$= \sum_{i,j,l,m} X^{ij}(g) \frac{\partial}{\partial g_{ij}} Y^{lm}(g) \frac{\partial}{\partial g_{lm}} - (X \leftrightarrow Y)\Big|_e =$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\substack{ijlm\\kn}} g^{ik} X_e^{kj} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} g^{ln} Y_e^{nm} \frac{\partial}{\partial g_{lm}} - (X \leftrightarrow Y)\Big|_e =$$

$$= \sum_{ijkm} g^{ik} X_e^{kj} Y_e^{jm} \frac{\partial}{\partial g_{im}} - (X \leftrightarrow Y)\Big|_e =$$

$$= \sum_{ijm} \left(X_e^{ij} Y_e^{jm} - Y_e^{ij} X_e^{jm}\right) \frac{\partial}{\partial g_{im}}$$

$$= \sum_{i,j} (X_e \cdot Y_e - Y_e \cdot X_e)^{im} \frac{\partial}{\partial g_{im}}$$

$\Rightarrow$ $[X_e, Y_e]$ ist der Kommutator von Matrizen! $\square$

Def. 5.11. Eine Lie-Gruppe G wirkt auf sich selbst durch <u>Konjugation</u>

$$G \longrightarrow \mathrm{Diff}(G)$$

$$g \longmapsto (\psi_g : G \to G)$$

mit $\psi_g(a) = g \cdot a \cdot g^{-1}$.

Die induziere Darstellung auf $\mathfrak{g} = T_eG$ durch den push-forward $(\psi_g)_*$ heißt <u>adjungierte Darstellung</u>:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}: G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \left(\mathrm{Ad}_g := (\psi_g)_*\big|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \right) \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 25: Zeige, dass für $G = GL(n,\mathbb{R})$ die adjungierte Darstellung durch das Matrixprodukt

$$\mathrm{Ad}_g X_e = g \cdot X_e \cdot g^{-1} \qquad X_e \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \quad g \in GL(n,\mathbb{R})$$

gegeben ist.

Übungsaufgabe 26: Zeige, dass für $G = GL(n,\mathbb{R})$ der Fluss $\sigma_t(e)$ des links-invarianten Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ gegeben ist durch $\sigma_t(e) = \exp\{tX_e\}$.

Weiters ist

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Ad}_{\exp\{tX_e\}} Y_e \Big|_{t=0} = [X_e, Y_e].$$

Def. 5.12: Der duale Vektorraum $\mathfrak{g}^*$ von $\mathfrak{g}$ heißt <u>Lie-Koalgebra.</u> Die adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$ induziert auf $\mathfrak{g}^*$ die <u>koadjungierte Darstellung</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}^*: G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*) \\ g &\longmapsto \mathrm{Ad}_g^* \end{aligned}$$

wobei für $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $g \in G$ gilt:

$$\mathrm{Ad}_g^* \xi(X_e) := \xi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(X_e)), \quad \forall X_e \in \mathfrak{g}.$$

Übungsaufgabe 27: Wie wirkt Ad^* für $G = GL(n,\mathbb{R})$ auf $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{gl}^*(n,\mathbb{R})$?

Bem.: $\mathfrak{g}^*$ trägt die duale Struktur zu einer Lie-Klammer $[\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, d.h. eine Lie-Koklammer $d: \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$, die eine Eigenschaft dual zur Jacobi-Identität erfüllt.

5.2. Orbiträume

Def. 5.13: Gegeben sei eine diff. Wirkung $\psi: G \to M$ einer Lie-Gruppe G auf eine diff. Mflk M.

Der Orbit von G durch $p \in M$ ist

$$O_p := \{\psi_g(p) \in M \mid \forall g \in G\}.$$

Der Stabilisator von $p \in M$ (oder Isotropiegruppe, kleine Gruppe (little group)) ist die Untergruppe

$$G_p := \{g \in G \mid \psi_g(p) = p\}.$$

Bsp 5.14: $M = \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ mit Koordinaten $(z_1, \dots, z_n)$

$$G = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\psi : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n)$$

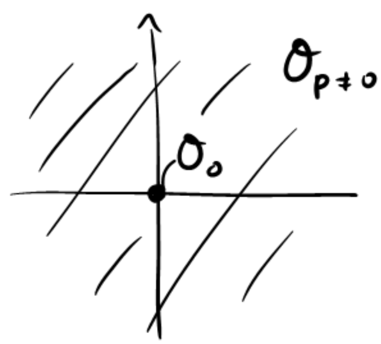
$$\lambda \longmapsto \psi_\lambda(z_1, \dots z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$$

Orbits:

$$\mathcal{O}_0 = \{0\}$$

$$\mathcal{O}_{(z_1, \dots z_n) \neq 0} = \{(\lambda z_1, \dots \lambda z_n) \in M \mid \lambda \in \mathbb{C}^\times\} \cong \mathbb{C}^\times$$

$n = 1$:



Stabilisator:

$$G_0 = \mathbb{C}^\times$$

$$G_{p \neq 0} = \{1\}$$

Def 5.15: G wirkt auf M

(a) <u>transitiv</u>, wenn es nur einen Orbit gibt,

(b) <u>frei</u>, falls alle Stabilisatoren trivial sind,

(c) <u>lokal frei</u>, falls alle Stabilisatoren diskret sind.

Bsp 5.14: Fortsetzung:

Die Wirkung $\varphi: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^n$ ist nicht transitiv, nicht frei, nicht lokal frei.

Aus φ kann eine freie Wirkung gemacht werden, indem man den Ursprung aus $\mathbb{C}^n$ nimmt:

$$\varphi: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ ist frei.}$$

Für $n=1$ ist dann $\varphi: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ auch transitiv.

Def 5.16: Orbits von G definieren eine Äquivalenzrelation auf M: Zwei Punkt $p, q \in M$ sind äquivalent $\underline{p \sim q}$, falls sie im gleichen Orbit liegen, d.h. $p \in \mathcal{O}_q$.

Der Raum aller Orbits $M/G = M/_\sim$ heißt <u>Orbitraum</u>, mit Projektion

$$\pi: M \to M/G, \quad p \mapsto \mathcal{O}_p.$$

Bem.: M/G wird üblicherweise mit der "schwächsten" Topologie ausgestattet, sodass π stetig ist, d.h. wir definieren $U \subset M/G$ als offen, falls

$\pi^{-1}(U)$ offen ist. $\Rightarrow$ Quotiententopologie.

Bsp 5.14 Fortsetzung

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n/\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{CP}^n \sqcup \{0\} \\ 0 &\longmapsto \mathcal{O}_0 = \{0\} \\ p \neq 0 &\longmapsto \mathcal{O}_p \cong \mathbb{C}^\times \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{CP}^n$ wird die Quotiententopologie zur üblichen Topologie. Auf ganz $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}^\times$ ist sie aber nicht Hausdorff (die einzige offene Menge die 0 enthält ist ganz $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}^\times$).

Satz 5.17: Eine kompakte Lie-Gruppe G wirke frei auf eine diff. Mflk M. Dann ist M/G eine diff. Mflk und $\pi : M \longrightarrow M/G$ ist ein prinzipales G-Bündel (d.h. die Fasern sind $\pi^{-1}(\mathcal{O}_p) \cong G$).

Bew. 5.17: siehe z.B. da Silva S. 143 $\square$

Bsp 5.18: Wirkung $\varphi: S^1 \to \mathrm{Diff}(S^{2n+1})$ definiert durch:

Betrachte $S_R^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $R>0$,

$$S_R^{2n+1} = \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 - R = 0 \},$$

$$\varphi_\lambda(z) = \lambda \cdot z \quad , \quad \lambda = e^{it} \in S^1.$$

$$\left(\varphi_\lambda(S_R^{2n+1}) = S_R^{2n+1} \right)$$

Diese Wirkung ist frei auf S_R^{2n+1} (der einzige Punkt in $\mathbb{C}^n$ mit nicht-trivialem Stabilisator ist $0 \in \mathbb{C}^n$).

$\Rightarrow$ S_R^{2n+1} / S^1 ist eine Mfk.

Tatsächlich gilt

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{von } S^1\text{-Wirkung} \\ \text{auf } S_R^{2n+1}}}{S_R^{2n+1} / S^1} \cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kam von } \mathbb{C}^\times\text{-Wirkung} \\ \mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_+ \times S^1 \text{ auf } \mathbb{C}^n \setminus \{0\}}}{\mathbb{C}P^n}$$

Bedingung $\underline{\underline{|z|^2 - R = 0}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}_+$ - Äquivalenzrelation

5.3. Hamiltonsche Wirkung, Impulsabbildung

Def. 5.19: Gegeben (M,ω) und eine Lie-Gruppe G die auf M diff. wirkt, $\psi : G \to \mathrm{Diff}(M)$.
ψ heißt <u>symplektische Wirkung</u>, wenn

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{Sympl}(M,\omega) \subset \mathrm{Diff}(M).$$

Bem.: Nach Lemma 3.10 gilt folgende Korrespondenz:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{komplette symplektische}\\ \text{zeit-abh. Vektorfelder}\\ \text{auf } M\end{array}\right\} \overset{1-1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{symplektische}\\ \text{Wirkung von } \mathbb{R}\\ \text{auf } M\end{array}\right\}$$

Eine symplektische Wirkung von G auf M bestimmt eine infinitesimale Wirkung von $\mathfrak{g}$:

Lemma 5.20: Eine symplektische Wirkung $\psi : G \to \mathrm{Sympl}((M,\omega))$ induziert einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M,\omega) \\ \xi &\longmapsto X_\xi := \frac{d}{dt}\psi_{\exp(t\xi)}\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Bem. 5.20: Da $\psi_g \in \mathrm{Sympl}(M,\omega)$, $\forall g \in G$, ist X_ξ eine symplektisches Vektorfeld, d.h. $\iota_{X_\xi}\omega$ ist geschlossen.

Weiters gilt:

$$(*)\qquad X_{\mathrm{Ad}_g \xi} = (\psi_g)^* (X_\xi) := (\psi_g)_* (X_\xi)_{\psi_{g^{-1}}}$$

$$((\psi_g)_* X_\xi (f))_{\psi_g^{-1}} = X_\xi (f \circ \psi_g)_{\psi_g^{-1}} = \frac{d}{dt} \psi_{\exp(t\xi)} \Big|_{t=0} (f \circ \psi_g)_{\psi_g^{-1}}$$

$$= \psi_{\exp(t\xi)*}\left(\frac{d}{dt}\right)\Big|_{t=0} (f \circ \psi_g)_{\psi_g^{-1}}$$

$$= \frac{d}{dt} (f \circ \psi_g \circ \psi_{\exp(t\xi)} \circ \psi_{g^{-1}}) \Big|_{t=0}$$

$$X_{\mathrm{Ad}_g \xi}(f) = \frac{d}{dt} \psi_{\exp(t \,\mathrm{Ad}_g \xi)} \Big|_{t=0} f =$$

$$= \psi_{\exp(t\,\mathrm{Ad}_g \xi)*}\left(\frac{d}{dt}\right) f \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(f \circ \psi_{\underbrace{\exp(t\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \xi)}_{g \exp(t\xi) g^{-1}}}\Big)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} (f \circ \psi_g \circ \psi_{\exp(t\xi)} \circ \psi_{g^{-1}}) \Big|_{t=0}$$

In $(*)$ setze $g = \exp(s\eta)$ und $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}$:

$$X_{[\eta,\xi]} = [X_\eta, X_\xi]$$

$\Rightarrow$ Lie-Algebra-Homomorphismus $\square$

Einschub: Chevalley Kohomologie oder Lie-Algebra Kohomologie

Def / Lemma: $\mathfrak{g}$ sei eine Lie-Algebra und

$$C^k := \Lambda^k \mathfrak{g}^* = \{\mathfrak{g} \wedge \overset{k}{\cdots} \wedge \mathfrak{g} \to \mathbb{R}\}$$

der Vektorraum der alternierenden k-Linearformen. Die lineare Abbildung

$$\delta : C^k \to C^{k+1}, \qquad \delta\sigma = 0 \text{ für } \sigma \in C^0 \text{ und}$$

$$\delta\sigma(\xi_0, \dots, \xi_k) := \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \sigma([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots \hat{\xi}_i \dots, \hat{\xi}_j, \dots \xi_k)$$

wobei $\sigma \in C^k$, $\xi_i \in \mathfrak{g}$, ist ein Differential, d.h. $\delta^2 = 0$.

Def: Die zugehörige Kohomologie des Komplexes

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \to \dots$$

mit

$$H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) := \frac{\operatorname{Kern}(C^k \xrightarrow{\delta} C^{k+1})}{\operatorname{Bild}(C^{k-1} \xrightarrow{\delta} C^k)}$$

heißt <u>Chevalley Kohomologie</u> (oder Lie Algebra Kohom.)

Bem.: $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$: $\quad \delta\sigma(\xi_0, \xi_1) = \underline{-\sigma([\xi_0, \xi_1]) = 0}$

$\qquad$ mod $\sigma(\xi_0) = \delta\lambda(\xi_0) = 0$

$H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$:

$$\delta\tau(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = -\tau([\xi_0,\xi_1],\xi_2) + \tau([\xi_0,\xi_2],\xi_1) - \tau([\xi_1,\xi_2],\xi_0) = 0$$

$$\text{mod } \tau(\xi_0,\xi_1) = \delta\sigma(\xi_0,\xi_1) = \sigma([\xi_0,\xi_1])$$

Def. 5.21: Eine symplektische Wirkung von G auf (M,ω) heißt <u>schwach Hamiltonsch</u>, falls das zugehörige Vektorfeld X_ξ (aus Lemma 5.10) ein Hamiltonsches Vektorfeld ist, d.h. falls eine lineare Abbildung

$$\mu^*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$\xi \longmapsto H_\xi$$

existiert mit $dH_\xi = \iota_{X_\xi}\omega$.

Wenn μ^* ein Lie-Algebra-Homomorphismus ist, d.h.

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\},$$

dann heißt die Wirkung <u>Hamiltonsch</u>, und μ^* heißt <u>Koimpulsabbildung</u>.

Was ist das Kriterium für eine Hamiltonsche Wirkung?

Lemma 5.22.: Gegeben sei eine schwach Hamiltonsche Wirkung mit linearer Abbildung $\xi \mapsto H_\xi$, $\iota_{X_\xi}\omega = dH_\xi$. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $\tau: \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, sodass $\forall \xi,\eta\in\mathfrak{g}$ gilt:

$$\tau(\xi,\eta) = \{H_\xi, H_\eta\} - H_{[\xi,\eta]}.$$

τ ist ein (Chevalley-) Kozykel, d.h.:

$$\delta\tau(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = 0.$$

Bem. 5.22: (a) Wir schreiben $X_\xi = X_{H_\xi}$ wegen $\iota_{X_\xi}\omega = dH_\xi$:

$$X_{H_{[\xi,\eta]}} = X_{[\xi,\eta]} = [X_\xi, X_\eta] = [X_{H_\xi}, X_{H_\eta}] = $$

$$\underset{\text{Satz 2.20}}{=} X_{\{H_\xi,H_\eta\}}.$$

$\Rightarrow$ $\{H_\xi, H_\eta\} - H_{[\xi,\eta]} =: \tau(\xi,\eta)$ ist konstant.

$\Rightarrow$ $\{H_{[\xi,\eta]}, H_\varsigma\} = \{\{H_\xi, H_\eta\}, H_\varsigma\}$

(b) linke Seite $= \tau([\xi,\eta],\varsigma) + H_{[[\xi,\eta],\varsigma]}$

Die Kozykel-Eigenschaft folgt aus der Jacobi-Identität für $\{\cdot,\cdot\}$ und $[\cdot,\cdot]$.

$\square$

Lemma 5.23: Eine schwach Hamiltonsche Wirkung ist genau dann Hamiltonsch, wenn der Kozykel $\tau: \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ δ-exakt ist, d.h. $\exists\, \sigma: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\tau(\xi,\eta) = \delta\sigma(\xi,\eta) = -\sigma([\xi,\eta]).$$

Bew. 5.23:

Setze $\tilde{H}_\xi = H_\xi - \sigma(\xi)$:

$$\{\tilde{H}_\xi, \tilde{H}_\eta\} = \{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]} - \sigma([\xi,\eta])$$
$$= \tilde{H}_{[\xi,\eta]} \qquad \square$$

Bem 5.24: Eine schwach Hamiltonsch Wirkung bestimmt also eine Klasse $[\tau] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ in der 2-ten Chevalley Kohomologie. Wenn sie trivial ist, dann ist die Wirkung Hamiltonsch.

Bem.: Die Abbildung $\mu^*: \xi \mapsto H_\xi$ ist linear: $H_\xi(p) = \mu(p)\cdot\xi$ mit $\mu(p) \in \mathcal{F}(M) \otimes \mathfrak{g}^*$.

Anders gesagt: $\mu: M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Satz 5.25: Eine Wirkung von G auf M ist genau dann Hamiltonsch, wenn eine diff. Abbildung

$$\mu: M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

existiert, sodass

(1) $\mu(p)\cdot\xi = H_\xi(p)$ eine Hamiltonsche Funktion zum Vektorfeld X_ξ ist,

$$\iota_{X_\xi}\omega = d\mu(p)\cdot\xi\,,$$

(2) μ ist äquivariant bzgl. der Wirkung $\varphi: G \longrightarrow \mathrm{Sympl}(M,\omega)$:

$$\mu \circ \varphi_g = \mathrm{Ad}^*_g \circ \mu \quad \forall g \in G.$$

Def. 5.26: Die diff. Abbildung
$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$$
mit den Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 5.25 heißt <u>Impulsabbildung</u> zur Hamiltonschen Wirkung G auf (M,ω).
(M,ω,G,μ) heißt Hamiltonscher G-Raum.

Bem. 5.25: <u>zu zeigen:</u>

Hamiltonsche Wirkung
$\updownarrow$
Koimpulsabbildung $\mu^* : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$, $\xi \mapsto H_\xi$ ist Lie-Alg.-Homomorphismus:

Impulsabbildung $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ ist äquivariant:

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\} \quad (*) \iff \mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu \quad (**)$$

$p \in M$, $\xi \in \mathfrak{g}$: $\quad \mu(p)(\xi) =: H_\xi(p)$ mit $H_\xi = \mu^*(\xi)$

Zuerst $(*)$ integrieren:

- mit $\frac{d}{dt} Ad_{\exp(t\xi)} \eta \Big|_{t=0} = [\xi,\eta]$ (Ü26)

- $\{H_\xi, H_\eta\} = \omega(X_\xi, X_\eta) = -\iota_{X_\eta}\omega(X_\xi) = -dH_\eta(X_\xi)$
$= -X_\xi(H_\eta)$

$$\frac{d}{dt} H_\eta \circ \varphi_{\exp(t\xi)}\Big|_{t=0} = dH_\eta(X_\xi)$$

daher: $(*) \Leftrightarrow H_{Ad_{g^{-1}}\eta} = H_\eta \circ \varphi_g$

nun mit der Impulsabbildung $H_\eta(p) = \mu(p)(\eta)$:

$$H_{Ad_{g^{-1}}\eta}(p) = \mu(p)(Ad_{g^{-1}}\eta) = Ad_g^* \mu(p)(\eta)$$

$$\shortparallel$$

$$H_\eta(\varphi_g(p)) = \mu(\varphi_g(p))(\eta) \qquad \forall \eta \in \mathfrak{g},\ p \in M$$

$$\Rightarrow \quad Ad_g^* \mu(p) = \mu(\varphi_g(p)) \qquad \square$$

Bem.: Die Impulsabbildung ist die Verallgemeinerung der Hamiltonschen Funktion für Lie-Gruppen.

Bsp. 5.18 nochmal:
Wir betrachteten die Wirkung von S^1 auf $S_R^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, $\varphi: S^1 \longrightarrow \mathrm{Diff}(S_R^{2n-1})$.
S_R^{2n-1} war definiert als $\{|z|^2 - R = 0\} \subset \mathbb{C}^n$.

Tatsächlich kann die Wirkung φ auf $\mathbb{C}^n$ gehoben werden: $\varphi_\lambda(z,\bar{z}) = (\lambda \cdot z, \bar{\lambda}\bar{z})$ ist eine sympl. Wirkung auf $(\mathbb{C}^n, \omega = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i)$.

Das zugehörige symplektische Vektorfeld ist:

$$X_\xi(z,\bar z) = \sum_{i=1}^n X_t^i(z,\bar z)\,\partial_{z_i} + \bar X^i(z,\bar z)\,\partial_{\bar z_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_{e^{it\xi}}^i}{dt}\Big|_{t=0} \partial_{z_i} + c.c. =$$

$$= \sum_{i=1}^n \xi\left(i z_i\,\partial_{z_i} - i\bar z_i\,\partial_{\bar z_i}\right) \qquad \xi \in \mathbb{R} \cong \mathfrak{g}$$

X_ξ ist ein Hamiltonsches Vektorfeld:

$$\iota_{X_t}\omega = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^n \xi\left(i z_i\, d\bar z_i + i\bar z_i\, dz_i\right)$$

$$= -\frac{\xi}{2}\sum_{i=1}^n \left(z_i\, d\bar z_i + \bar z_i\, dz_i\right) =$$

$$= d\left(-\frac{\xi}{2}\left(|z|^2 - R\right)\right)$$

$R \in \mathbb{R} \cong \mathfrak{g}^*$ beliebig gewählt

$$\Rightarrow \mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}$$

$$z \longmapsto -\frac{1}{2}\left(|z|^2 - R\right)$$

ist die Impulsabbildung zur Wirkung φ auf $\mathbb{C}^n$.

$$\Rightarrow \quad S_R^{2n-1} = \mu^{-1}(0) \qquad \text{für } R > 0.$$

Ist die Impulsabbildung eindeutig bestimmt?

Satz 5.27: Die Impulsabbildung $\mu: M \to \mathfrak{g}^*$ für eine Hamiltonsche Wirkung einer kompakten Lie-Gruppe G auf (M, ω) ist eindeutig bis auf Addition eines Elements in $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

Bem.: Wir haben gesehen, dass $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ alle Elemente in $\mathfrak{g}^*$ enthält, die $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ vernichten, d.h.

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathrm{Ann}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$$ ... Annulator von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

Abelsche Lie-Gruppe: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0 \Leftrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}^*$

Halbeinfache Lie-Gruppe: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g} \Leftrightarrow H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$

Cor. 5.28: Für halb-einfache kompakte Lie-Gruppen ist die Impulsabbildung eindeutig.

Bew 5.27: μ_1 und μ_2 seien zwei Impulsabb. zur Hamiltonschen Wirkung mit Vektorfeld X_ξ. Setze:

$$H_{1\xi}(p) = \mu_1(p)(\xi), \quad H_{2\xi}(p) = \mu_2(p)(\xi)$$

$$dH_{1\xi} - dH_{2\xi} = \imath_{X_\xi}\omega - \imath_{X_\xi}\omega = 0$$

$\Rightarrow H_{1\xi} - H_{2\xi} = c(\xi) =$ konstant

$\Rightarrow c \in \mathfrak{g}^*$

$\mu_1^*: \xi \to H_{1\xi}$, $\mu_2^*: \xi \to H_{2\xi}$ sind beides Lie-Algebra-Homomorphismen:

$$H_{1[\xi,\eta]} - H_{2[\xi,\eta]} = c([\xi,\eta])$$

$$= \{H_{1\xi}, H_{1\eta}\} - \{\underset{H_{1\xi} - c(\xi)}{\underset{\shortparallel}{H_{2\xi}}}, H_{2\eta}\} = 0$$

$\Rightarrow c([\xi,\eta]) = 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$

$\Rightarrow c \in \mathrm{Ann}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ $\square$