5.4. Symplektische Reduktion, Marsen-Weinstein-Theorie

Motivation: Das Noether-Prinzip

Satz 5.29: (M, ω, G, μ) sei ein Hamiltonscher G-Raum und $H: M \to \mathbb{R}$ eine G-invariante Funktion (d.h. $H(\psi_g(p)) = H(p), \forall g \in G$). Dann ist μ konstant entlang der Hamiltonschen Bewegung von H.

Bew. 5.29: $X_H \ldots$ Hamiltonsches Vektorfeld zu H

$$H_\xi(p) := \mu(p)(\xi) \quad \xi \in \mathfrak{g}, \forall p \in M$$

z.z. $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathcal{L}_{X_H} H_\xi = 0$

$$\mathcal{L}_{X_H} H_\xi = X_H(H_\xi) = dH_\xi(X_H) =$$

$$= \iota_{X_H} \iota_{X_\xi} \omega = - \iota_{X_\xi} \iota_{X_H} \omega =$$

$$= - \iota_{X_\xi} dH = - \mathcal{L}_{X_\xi} H \underset{\uparrow}{=} 0 \quad \square$$

H ist G-invariant!

Bem.: In einem Hamiltonschen System (M, ω, H) nennt man eine Hamiltonsche Wirkung (wie in Satz 5.27) einer (Lie-)Gruppe auf M, die H invariant lässt, eine <u>Symmetrie</u>. Das Noether-Prinzip sagt, dass zur Symmetrie $G \circlearrowright (M, \omega, H)$ eine Erhaltungsgröße existiert, nämlich die Impulsabbildung.

Da die Hamiltonsche Bewegung (i) entlang der Niveauflächen von μ verläuft, und (ii) <u>nicht</u> entlang der Orbits der G-Wirkung (H ist G-invariant), liegt es nahe die Bewegung auf dem reduzierten (Orbit-)Raum $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ zu betrachten. Damit M_{red} „gute" Eigenschaften hat benötigen wir einige Voraussetzungen.

Satz 5.30 (Marsden-Weinstein-Meyer)

(M, ω, G, μ) sei ein Hamiltonscher G-Raum, und G eine kompakte Lie-Gruppe, die frei auf $\mu^{-1}(0)$ wirkt. $0 \in \mathfrak{g}^*$ sei ein regulärer Wert von μ.

Dann ist:

(a) $\iota : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ eine koisotrope Untermflk,

(b) der Orbitraum $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ eine symplektische Mflk mit symplektischer Struktur ω_{red}, sodass $\iota^* \omega = \pi^* \omega_{red}$, wobei $\pi : \mu^{-1}(0) \to M_{red}$.

$$\dim M_{red} = \dim M - 2 \dim G.$$

Bew 5.30: (a) Da $0 \in \mathfrak{g}^*$ ein regulärer Wert ist, ist $\mu^{-1}(0)$ eine Mflk. Um zu sehen, dass sie koisotrop ist, betrachten wir: $p \in \mu^{-1}(0)$, $\mathcal{O}_p \ldots$ Orbit von p

$$T_p \mathcal{O}_p = \{ X_\xi|_p \mid \xi \in \mathfrak{g} \}$$

Wir zeigen: $T_p \mathcal{O}_p = (T_p \mu^{-1}(0))^\omega$.

$$H_\xi(p) = \mu(p)(\xi) = 0 \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

$\forall Y \in T_p \mu^{-1}(0)$ gilt:

$$\omega(X_\xi, Y) = \iota_{X_\xi}\omega(Y) = dH_\xi(Y) = 0$$

$$\Rightarrow X_\xi|_p \in (T_p \mu^{-1}(0))^\omega$$

$$\Rightarrow T_p O_p \subseteq (T_p \mu^{-1}(0))^\omega$$

da $\dim T_p O_p = \dim G$

$$\dim (T_p \mu^{-1}(0))^\omega = \operatorname{codim} T_p \mu^{-1}(0) = \dim G$$

$$\Rightarrow T_p O_p = (T_p \mu^{-1}(0))^\omega$$

Da $O_p \subset \mu^{-1}(0)$:

$$(T_p \mu^{-1}(0))^\omega = T_p O_p \subset T_p \mu^{-1}(0)$$

$\Rightarrow \mu^{-1}(0)$ ist eine koisotrope Untermflk

(b) Nach Satz 5.17 ist der Orbitraum $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ eine Mflk.

$\forall p \in \mu^{-1}(0)$ gilt:

$\iota^*\omega|_p$ induziert auf $T_p \mu^{-1}(0) / T_p O_p$ eine symplektische Struktur laut Prop. 1.6.

Für zwei Punkte, p und q, im selben Orbit, d.h. $\exists g \in G: q = \varphi_g(p)$, gilt:

$$\varphi_g^*(\iota^*\omega)(X_p, Y_p) = (\iota^*\omega)(X_p, Y_p)$$

$\iota^*\omega$ ist also wohl-definiert auf dem Orbit O_p.
$\Rightarrow \iota^*\omega$ induziert eine symplektische Struktur auf M_{red}:

$$\iota^*\omega = \pi^*\omega_{red} \qquad \square$$

Bsp 5.18 nochmal:

Für die Hamiltonsche Wirkung von $U(1) = S^1$ auf $\mathbb{C}^n$ durch $\varphi_\lambda(z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)$ hatten wir die Impulsabbildung $\mu: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $\mu(z) = -\frac{1}{2}(|z|^2 - R)$, $R \in \mathbb{R}$. Für $R > 0$ ist $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert, d.h. $\mu^{-1}(0) = S_R^{2n-1}$ eine Untermflk von $\mathbb{C}^n$, und

$$M_{red} = \mu^{-1}(0)/U(1) = S_R^{2n-1}/U(1) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

Bsp. 5.31: Verallgemeinerung: Betrachte die Wirkung von $U(k)$ (unitäre Matrizen, $M^{-1} = M^*$, dual bzgl. hermitschem inneren Produkt) auf $\mathbb{C}^{kn}$. $\varphi_M(A) = M \cdot A$, $A \in Mat(k \times n, \mathbb{C})$,

$M \in U(k)$. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{kn} = 2kn$, $\dim_{\mathbb{R}} U(k) = k^2$.

$\mathfrak{u}(k)$ ... Lie-Algebra von $U(n)$, hermitsche Matrizen $X = X^*$ $\left(M = e^{iX}, e^{-iX} = e^{-iX^*} \right)$

Impulsabbildung: via herm. inneren Prod.

$$\mu : \mathbb{C}^{kn} \longrightarrow \mathfrak{u}^*(k) \cong \mathfrak{u}(k)$$

$$A \longmapsto -\frac{1}{2} \big(\underbrace{A \cdot A^*}_{\text{herm. } k \times k\text{-Matrix}} - R \cdot \mathbb{1} \big)$$

$$(AA^*)^* = AA^*$$

Beachte: $H^1(\mathfrak{u}(n), \mathbb{R}) = \operatorname{Ann}([\mathfrak{u}(k), \mathfrak{u}(k)]) =$

$$= \operatorname{Ann}([\mathfrak{su}(k), \mathfrak{su}(k)]) =$$

$$= \operatorname{Ann}(\mathfrak{su}(k)) =$$

$$\overset{\text{inneres Prod.}}{\cong} \mathfrak{u}(1) \subset \mathfrak{u}(k)$$

$$\mathfrak{u}(1) = \{ R \cdot \mathbb{1} \mid R \in \mathbb{R} \}$$

Reduktion: $R > 0$

$$M_{red} = \mu^{-1}(0) / U(k) \cong \frac{\mathbb{C}^{kn} - \{0\}}{GL(k, \mathbb{C})} = Gr(k, n)$$

$Gr(k,n)$ ... Raum der k-dim. Flächen $\mathbb{C}^k$ in $\mathbb{C}^n$.

$$\dim M_{red} = 2kn - 2k^2 = 2k(n-k)$$