Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 10

Differentialgleichungen für Modulformen

37. Die Identität von Bol.
Es sei $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass gilt:

    (a) $\partial_k \left(f|_k\gamma\right) = \left(\partial_k f\right)|_{k+2}\gamma$.

    (b) $D^{k-1}\left(f|_{2-k}\gamma\right) = \left(D^{k-1}f\right)|_k\gamma$.
    Benutzen Sie dazu die Relation zwischen $D^r f$ und $\partial^n f$.

    Damit erhalten wir eine Abbildung $D^{k-1} : M^!_{2-k}(\Gamma_1) \to M^!_k(\Gamma_1)$. Dies ist die Verallgemeinerung der Tatsache, dass die Ableitung einer Modulfunktion wieder modular ist. Beachten Sie, dass wiederum die Gewichte k und $2-k$ involviert sind.

38. Die Schwarzsche Ableitung.
Sei $y(x)$ eine nicht-konstante Funktion von $x \in \mathbb{C}$. Die Schwarzsche Ableitung von y bezüglich x ist
$$\{y; x\} := \frac{2y'y''' - 3(y'')^2}{2(y')^2}.$$

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\left\{\frac{ay+b}{cy+d}; x\right\} = \{y; x\}$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

    (b) (2 Punkte) Sei $x(z)$ eine nicht-konstante Funktion von z. Zeigen Sie, dass
    $$\{y; z\} = \{x; z\} + \{y; x\}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

39. Schwarzsche Differentialgleichung

    (a) (2 Punkte) Es seien ω_1 und ω_2 die Periodenintegrale aus Aufgabe 27. Definieren Sie $\tau(\lambda) = \frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_2(\lambda)}$. Sei $\lambda(\tau)$ die Umkehrfunktion von $\tau(\lambda)$. Zeigen Sie, dass gilt:
    $$\{\lambda; \tau\} + \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}(D\lambda)^2 = 0.$$

(b) (2 Punkte) Drücken Sie $\lambda(\tau)$ als rationale Funktion von $j(\tau)$ aus.

40. Lineare Differentialgleichung für E_4

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $E_4(\tau) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; t(\tau)\right)^4$, wobei $t(\tau) = \frac{1728}{j(\tau)}$. Betrachten Sie dazu $E_4^{\frac{1}{4}}$ und zeigen Sie, dass beide Seiten dieselbe Differentialgleichung erfüllen.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den linearen Differentialoperator 5. Ordnung, der $E_4(\tau)$ annihiliert.

Abgabetermin: Dienstag, 15.1.2013 um 10:00 Uhr.