Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 11

Modulformen für Kongruenzgruppen

41. Die Schranke von Sturm
(4 Punkte) Es sei $\Gamma \subset \Gamma_1$ eine Kongruenzgruppe vom Index N und $f \in M_k(\Gamma)$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$, falls $\nu_\infty(f) > N\frac{k}{12}$.

42. Konstruktion von Modulformen für $\Gamma(N)$.
(4 Punkte) Es seien $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ und $g(\tau) = f(\alpha \cdot \tau)$. Zeigen Sie, dass wenn $\alpha = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\alpha \cdot \tau = N\tau$, dann ist $g(\tau)|_k\gamma = f(N\tau)|_k \begin{pmatrix} a & Nb \\ c/N & d \end{pmatrix}$.

43. Identitäten zwischen Eisensteinreihen
Beweisen Sie die folgende Identitäten durch Manipulation von Potenzreihen und unendlichen Produkten in $q = e^{2\pi i\tau}$.

   (a) (1 Punkt) $E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - E_2(\tau) = 48\sum_{n>0,\, n \text{ ungerade}} \sigma_1(n)q^n$;

   (b) (1 Punkt) $E_k(\tau) - (1 + p^{k-1})E_k(p\tau) + p^{k-1}E_k(p^2\tau) = -\frac{2k}{B_k}\sum_{p\nmid n} \sigma_{k-1}(n)q^n$, $k \geq 2$, p eine Primzahl;

   (c) (1 Punkt) $E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2\left(\tau + \frac{1}{2}\right))$;

   (d) (1 Punkt) $\eta\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{48}} \frac{\eta^3(2\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)}$.

44. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ als η–Produkt

   (a) (1 Punkt) Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 17(b) um zu zeigen, dass

$$(\eta(\tau)\eta(2\tau))^8 \in S_8(\Gamma_0(2)).$$

   (b) (1 Punkt) Es sei $f(\tau)$ eine Funktion mit Periode 1, die $f\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = (-4\tau^2)^{\frac{k}{2}} f(\tau)$ für gerades k erfüllt. Zeigen Sie, dass $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

(c) (2 Punkte) Benutzen Sie Aufgabe (a) und (b), sowie Aufgabe 43 um zu zeigen, dass

$$\frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

Abgabetermin: Freitag, 22.1.2013 um 10:00 Uhr.