Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 12

Modulformen für $\Gamma_0(4)$

45. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ aus der Eisensteinreihe E_2

(a) (1 Punkt) Für $a \in \mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass

$$E_2(ST^{-a}S\tau) = (a\tau+1)^2 E_2(\tau) + \frac{12a}{2\pi i}(a\tau+1).$$

(b) (1 Punkt) Sei

$$F_2(\tau) = -\frac{1}{24}(E_2(\tau) - 3E_2(2\tau) + 2E_2(4\tau)) = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ungerade}}} \sigma_1(n) q^n$$

gemäss Aufgabe 43. Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) \in M_2(\Gamma_0(4))$ ist, und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $F_2(\tau) = \frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}$. Leiten Sie daraus folgende Identität her:

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^4(1+q^{2n})^4 = \sum_{\substack{n>0 \\ n \text{ ungerade}}} \sigma_1(n) q^n.$$

(d) (1 Punkt) Geben Sie einen anderen Beweis dafür, dass $-24F_2(\tau) = \frac{1}{2}(E_2(\tau) - E_2\left(\tau+\frac{1}{2}\right))$ in $M_2(\Gamma_0(4))$ ist, indem Sie ganz allgemein zeigen, dass $E_2(\tau) - \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} E_2\left(\tau + \frac{j}{N}\right) \in M_2(\Gamma_0(N^2))$.

46. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ aus Thetareihen
Es sei $g(\tau) = \theta(2\tau, 0)$ und $G_2(\tau) = g(\tau)^4$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) + g\left(\tau + \frac{1}{2}\right) = 2g(4\tau)$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $G_2 \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass F_2 aus Aufgabe 45 und G_2 linear unabhängig sind.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\frac{\eta(2\tau)^{20}}{\eta(\tau)^8\eta(4\tau)^8} \in M_2(\Gamma_0(4))$ und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $g(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} = e^{-\frac{2\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2}{\eta(2\tau)}$.

47. Erzeuger von $M_2(\Gamma_0(4))$.

Es sei $\mathcal{F}(2)$ der Fundamentalbereich von $\Gamma(2)$ aus der Vorlesung. Dann ist $\mathcal{F}_0(4) = \alpha\mathcal{F}(2)$, mit $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein Fundamentalbereich für $\Gamma_0(4) = \alpha\Gamma(2)\alpha^{-1}$ (siehe Aufgabe 15). Der Rand von $\mathcal{F}_0(4)$ besteht aus: 2 vertikalen Geraden von $(-3+i\sqrt{3})/4$ bzw. $(1+i\sqrt{3})/4$ nach ∞; 2 Kreisbögen vom Radius $1/2$ und Zentrum $-1/2$ bzw. 0; ein Kreisbogen vom Radius $1/6$ und Zentrum $1/6$, der sich von 0 nach $(9+i\sqrt{3})/28$ erstreckt; und ein Kreisbogen vom Radius $1/10$ und Zentrum $4/10$, der sich von $(9+i\sqrt{3})/28$ nach $1/2$ erstreckt.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle elliptischen Punkte in $\mathcal{F}_0(4)$, d.h. Punkte, die Γ_1-äquivalent zu i oder ω sind. Welche Punkte liegen am Rand und welche im Inneren?

(b) (1 Punkt) Es sei $f(\tau) \not\equiv 0$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht k, $k \in 2\mathbb{Z}$ für $\Gamma_0(4)$. An einer Spitze $\kappa = \alpha^{-1}\cdot\infty$ ist $\mathrm{ord}_\kappa(f)$ als die erste Potenz von q_h mit nicht-verschwindendem Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung von $f|_k(\alpha^{-1})$ definiert (wobei h der Verzweigungsindex aus Aufgabe 30 ist). Zeigen Sie, dass $\sum_{\tau\in\overline{\mathcal{F}}_0(4)} \mathrm{ord}_\tau(f) = \frac{k}{2}$, wobei in der Summe nur ein Punkt in einer Menge von $\Gamma_0(4)$–äquivalenten Randpunkte berücksichtigt wird.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Nullstellen von F_2 aus Aufgabe 45 und G_2 aus Aufgabe 46.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $M_2(\Gamma_0(4))$ von F_2 und G_2 erzeugt wird.

48. Dimensionsformeln für $M_*(\Gamma_0(4))$ und $S_*(\Gamma_0(4))$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $M_k(\Gamma_0(4)) = \{0\}$, falls $k < 0$ und $M_0(\Gamma_0(4)) = \mathbb{C}$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ jedes $f \in M_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2 geschrieben werden kann.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $S_6(\Gamma_0(4))$ von $G_2^2F_2 - 16G_2F_2^2$ erzeugt wird.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $k = 2k_0 \geq 6$ jedes $f \in S_k(\Gamma_0(4))$ als homogenes Polynom vom Grad k_0 in F_2 und G_2, das durch $G_2F_2(G_2 - 16F_2)$ teilbar ist, geschrieben werden kann.

Abgabetermin: Freitag, 29.1.2013 um 10:00 Uhr.