Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 2

Elliptische Funktionen und Periodenintegrale

5. Die Weierstraß'sche $\wp$–Funktion als doppelte Überlagerung $\mathbb{C}/L \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

   (a) (1 Punkt) Es sei $u \in \mathbb{C}$ fest. Zeigen Sie, daß die elliptische Funktion $\wp - u$ genau zwei Nullstellen (oder eine doppelte Nullstelle) hat.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Nullstellen der Funktion $\wp'$ genau $\omega_1/2$, $\omega_2/2$, und $(\omega_1 + \omega_2)/2$ sind. Geben Sie eine Charakterisierung der Nullstellen von $\wp'$ an, die unabhängig von der Wahl der Basis von L ist, d.h. unabhängig von den Perioden ω_1, ω_2 ist.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß e_1, e_2, e_3 genau die Werte von u sind, für die $\wp - u$ eine doppelte Nullstelle hat.

   (d) (1 Punkt) Warum sind e_1, e_2 und e_3 voneinander verschieden?

6. Analytische Fortsetzung der Umkehrfunktion von $\wp$.
   Es seien $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ein festes Gitter und $g_2 = g_2(L)$, $g_3 = g_3(L)$, $\wp(z) = \wp(z; L)$. Weiter sei $R_1 \subset \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ eine unbeschränkte, einfach zusammenhängende, offene Teilmenge der komplexen Ebene, die nicht die Nullstellen e_1, e_2, e_3 der Kubik $f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ enthält. Für $u \in R_1$ definieren wir die Funktion

$$z = g(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

   wobei ein fester Zweig der Quadratwurzel gewählt wird, wenn sich t in R_1 ändert. Diese Funktion ist unabhängig vom Weg in R_1 von u nach ∞. Sie kann wie folgt analytisch fortgesetzt werden: Wir wählen eine einfach zusammenhängende Teilmenge R_2 von $\mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ mit $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ und setzen für $u \in R_2$

$$z = g(u) = g(u_1) + \int_u^{u_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}, \qquad u_1 \in R_1 \cap R_2.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $u_1 \in R_1 \cap R_2$ und des Weges von u nach u_1. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine mehrwertige analytische Funktion, da die Folge der Mengen $R_1, R_2, \dots$ die Punkte e_1, e_2, e_3 umlaufen kann.

(a) (1 Punkt) Drücken Sie $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right)^2$ und $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2$ durch u aus.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $u = \wp(z)$.

Hinweis: Wenn die Funktion $z = g(u)$ die Punkte e_1, e_2, oder e_3 umläuft, kann sich ihr Wert nur um ein Element in L ändern. Also ist sie in $\mathbb{C}/L$ wohldefiniert und setzt sich stetig nach e_1, e_2, e_3 fort.

(c) (1 Punkt) Es sei γ_1 der Weg in der komplexen u-Ebene von e_2 nach ∞, der von $u = \wp(z)$ durchlaufen wird, wenn z von $\omega_2/2$ nach 0 entlang der Kante des Fundamentalparallelogramms läuft. Zeigen Sie, daß für einen geeigneten Zweig der Quadratwurzel gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = -\frac{\omega_2}{2}.$$

(d) (1 Punkt) Es sei γ_2 der Weg, der von ∞ nach e_2 entlang γ_1 führt, sich dann einmal um e_2 windet und entlang γ_1 nach ∞ zurück geht. Nehmen Sie den gleichen Zweig wie in (c) und zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_2} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \omega_2.$$

7. Allgemeine Periodenintegrale

(a) (1 Punkt) Beschreiben Sie, wie die Funktion $z = g(u)$ alle Urbilder von u unter $u = \wp(z)$ geben kann.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß alle Wurzeln von e_1, e_2, e_3 genau dann reell sind, wenn g_2, g_3 reell sind und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$.

(c) (1 Punkt) Nehmen Sie an, daß die Bedingungen in (b) erfüllt sind. Ordnen Sie die e_i, so daß $e_2 > e_3 > e_1$. Zeigen Sie, daß Sie die Perioden von L als

$$\frac{\omega_1}{2} = i \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dt}{\sqrt{-f(t)}}, \quad \frac{\omega_2}{2} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

dargestellt werden können. Hinweis: Wählen Sie den positiven Zweig und integrieren Sie entlang der reellen Achse.

(d) (1 Punkt) Beschreiben Sie unter dieser Annahme, wie man den Weg der Integration und den Zweig ändern kann, um die anderen Werte von z mit $u = \wp(z)$ zu finden, nämlich $\pm z + m\omega_1 + n\omega_2$ für $m, n \in \mathbb{Z}$.

8. Bogenlänge einer Ellipse und elliptische Integrale zweiter Gattung

   (4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Länge eines Bogens einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (0 < b \leq a)$ auf ein Integral der Form

$$\int \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx$$

   führt. Wählen Sie dazu eine geeignete Parametrisierung des Bogens $\gamma : [p, q] \to \mathbb{R}^2$. Die Bogenlänge ist dann gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_p^q \|\dot{\gamma}\| dt.$$

   Welche Bedeutung hat dabei k?

   Dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral zweiter Gattung. Von elliptischen Integralen spricht man allgemein, wenn der Integrand das Produkt einer rationalen Funktion mit einer Quadratwurzel eines Polynoms dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstelle ist. Der Begriff "elliptische Funktion" hat seinen historischen Ursprung darin, daß die Berechnung von Ellipsenbögen auf solche Integrale führt.

Abgabetermin: Freitag, 6. 11. 2012 um 10:00 Uhr.