

## Übungsblatt 4

### Kongruenzgruppen

#### 13. Indizes von Kongruenzgruppen

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $\Gamma_1(N)$  ein Normalteiler von  $\Gamma_0(N)$ , aber nicht von  $\Gamma_1$  ist. Ist  $\Gamma_0(N)$  ein Normalteiler von  $\Gamma_1$ ?
- (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Indizes von  $[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)]$ ,  $[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)]$ ,  $[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)]$  und  $[\Gamma_1 : \Gamma_0(N)]$ .

#### 14. Verhältnis von $\Gamma(N)$ zu $\Gamma_0(N^2)$ .

(4 Punkte) Bestimmen Sie einen Isomorphismus von  $\Gamma(N)$  nach einer Untergruppe von  $\Gamma_0(N^2)$  mit Index  $\phi(N)$  in  $\Gamma_0(N^2)$ . Insbesondere sind dann  $\Gamma(2)$  und  $\Gamma_0(4)$  isomorph. Hier ist  $\phi$  die sogenannte Eulerfunktion:  $\phi(N)$  ist gleich der Anzahl von positiven ganzen Zahlen, die kleiner als  $N$  und teilerfremd zu  $N$  sind.

#### 15. Fundamentalbereich von Untergruppen.

- (a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei Untergruppen mit endlichem Index in  $\Gamma_1$  sind, und dass  $\Gamma = \alpha\Gamma'\alpha^{-1}$  für ein  $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ . Wenn  $\mathcal{F}'$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma'$  ist, zeigen Sie, dass  $\alpha\mathcal{F}'$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$  ist.
- (b) (2 Punkte) Zeichnen Sie einen Fundamentalbereich von  $\Gamma_0(4)$ .

#### 16. Kongruenzgruppen der Stufe 2.

(4 Punkte) Beschreiben Sie alle Kongruenzgruppen  $\Gamma'$  der Stufe 2, d.h. alle Untergruppen, die zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma(2)$  liegen:  $\Gamma(2) \subset \Gamma' \subset \Gamma_1$ . Finden Sie einen einfach zusammenhängenden Fundamentalbereich für jedes solche  $\Gamma'$ . Nehmen Sie dazu einen passenden Anteil des Fundamentalbereichs  $\mathcal{F}(2)$  von  $\Gamma(2)$ , der in der Vorlesung gegeben wurde.

Abgabetermin: Dienstag, 20.11.2012 um 10:00 Uhr.