Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 5

Fundamentalbereiche und Spitzen

17. Kongruenzgruppen der Stufe 2 (Fortsetzung).

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\pm S, T^2$ eine der Untergruppen der Stufe 2 aus Aufgabe 16 erzeugen. Diese Untergruppe wurde von Hecke Γ_ϑ genannt.

   (b) (1 Punkt) Sei $\overline{\Gamma}^0(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \middle| b \equiv 0 \bmod 2 \right\} / \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\Gamma}^0(2)$ von TST und T^2 erzeugt wird, und dass $\overline{\Gamma}_0(2)$ von T und ST^2S erzeugt wird.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\overline{\Gamma}(2)$ von den Elementen T^2 und $ST^{-2}S$ erzeugt wird.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\overline{\Gamma}_0(4)$ von den Elementen T und $ST^{-4}S$ erzeugt wird.

18. Fundamentalbereich von $\Gamma_0(p^n)$.

   (a) (2 Punkte) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die folgende Liste von Elementen aus Γ_1 ein vollständiges Vertretersystem $\{\alpha_i\}$ für $\Gamma_0(p^n)$ in Γ_1 ist, d.h. dass $\Gamma_1 = \bigcup_i \alpha_i \Gamma_0(p^n)$ eine disjunkte Vereinigung ist:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ T^{-k}S, & k = 0, \dots, p^n - 1 \\ ST^{-kp}S, & k = 1, 2, \dots, p^{n-1} - 1. \end{array}$$

   (b) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentalbereich von $\Gamma_0(4)$ zu zeichnen.

   (c) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentalbereich von $\Gamma_0(p)$ zu beschreiben. Zeichnen Sie den Fundamentalbereich von $\Gamma_0(3)$.

19. Spitzen der Kongruenzgruppen der Stufe 2.

   (a) (2 Punkte) Der Fundamentalbereich von $\Gamma(2)$ besitzt 3 Randpunkte in den Punkten $\infty, 0, -1$. Zeigen Sie, dass $\Gamma(2)$ 3 Spitzen besitzt, d.h. dass die 3 Punkte $\Gamma(2)$-inäquivalent zueinander sind.

   (b) (2 Punkte) Wie viele Spitzen besitzt jede der Kongruenzgruppen aus Aufgabe 16?

20. Spitzen von $\Gamma_0(p)$ und $\Gamma_0(p^2)$.

   (a) (2 Punkte) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\Gamma_0(p)$ 2 Spitzen in den Punkten ∞ und 0 besitzt.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Gamma_0(p^2)$ $p+1$ Spitzen besitzt: $\infty, 0$ und $-\frac{1}{kp}$ für $k = 1, \ldots, p-1$.

Abgabetermin: Dienstag, 27. 11. 2012 um 10:00 Uhr.