DR. HABIL. EMANUEL SCHEIDEGGER
DIPL. PHYS. MAGNUS ENGENHORST
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

MODULFORMEN I
WS 12/13

Übungsblatt 6

Modulformen für Γ_1

21. Explizite Methode zur Bestimmung einer Modulform aus ihren Fourier–Koeffizienten.
(4 Punkte) Es sei $d_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1)$ die Dimension des Vektorraumes der holomorphen Modulformen vom Gewicht k. Zeigen Sie, dass gilt: Zu jedem d_k-Tupel komplexer Zahlen $(b_0, b_1, \ldots, b_{d_k-1})$ existiert genau eine Modulform $f \in M_k(\Gamma_1)$ mit Fourierreihen–Entwicklung $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, deren erste d_k Fourierkoeffizienten gerade die vorgegebenen Zahlen sind: $a_k = b_k, k = 0, \ldots, d_k - 1$.

22. Die Ramanujan τ–Funktion

    (a) (1 Punkt) Die Diskussion von $M_k(\Gamma_1)$ impliziert Relationen zwischen Produkten von Eisensteinreihen. Benützen Sie diese Relationen, um σ_7 durch σ_3, σ_9 durch σ_3 und σ_5, und σ_{13} durch σ_5 und σ_7 auszudrücken.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die lineare Relation zwischen E_{12}, E_6^2 und Δ.

    (c) (1 Punkt) Schreiben Sie $\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$. Drücken Sie $\tau(n)$ durch σ_{11} und σ_5 aus.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \bmod 691$.

23. Hankel–Determinante.
(4 Punkte) Eine Hankel–Matrix A erfüllt $A_{ij} = A_{i-1,j+1}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Delta(\tau)^2 = -\frac{691}{250 \cdot 1728^2} \det \begin{pmatrix} E_4 & E_6 & E_8 \\ E_6 & E_8 & E_{10} \\ E_8 & E_{10} & E_{12} \end{pmatrix}$$

24. Schwach holomorphe Modulformen
Es sei $f \in M_k^!(\Gamma_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie $k = 12\ell + k'$ mit eindeutig bestimmtem $\ell \in \mathbb{Z}$ und $k' \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}_\infty f \leq \ell$ für jedes $f \neq 0$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe a) und Eigenschaften von $S_{k'}(\Gamma_1)$, dass es für jede ganze Zahl $m \geq -\ell$ genau ein $f_{k,m} \in M_k^!(\Gamma_1)$ gibt, dessen Fourierreihen–Entwicklung die Form

$$f_{k,m}(\tau) = q^{-m} + O(q^{\ell+1})$$

hat.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\{f_{k,m} | m \geq -\ell\}$ eine Basis für $M_k^!(\Gamma_1)$ ist.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es ein Polynom $F_{k,D} \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad $D = \ell + m$ gibt, so dass $f_{k,m} = \Delta^\ell E_{k'} F_{k,D}(j)$ wobei $E_0 = 1$ und $j = {E_4}^3/\Delta \in M_0^!(\Gamma_1)$ ist. Betrachten Sie dazu zuerst den Fall $k = 0, \ell = 0$, dann den Fall $k \neq 0, \ell = 0$, dann den allgemeinen Fall.
Schliessen Sie daraus, dass die Koeffizienten $a_k(m,n)$ in der Fourierreihen–Entwicklung $f_{k,m} = q^{-m} + \sum_{n \geq \ell+1} a_k(m,n) q^n$ ganzzahlig sind.

Abgabetermin: Dienstag, 4.12.2012 um 10:00 Uhr.