Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 7

Differentialgleichungen für Periodenintegrale

25. Die elliptische Kurve in Hesse–Form und ihre j–Invariante.

    (a) (2 Punkte) Es sei $(x:y:z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ und $a \in \mathbb{C}$. Bringen Sie die elliptische Kurve $E = \{x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0\}$ in Weierstrassform.

    (b) (2 Punkte) Die j–Invariante einer elliptischen Kurve ist definiert als $j(\tau) = E_4(\tau)^3/\Delta(\tau)$. Bestimmen Sie die j–Invariante der elliptischen Kurve aus Aufgabe a).

26. Hypergeometrische Funktion.
    Es sei

$$ {}_2F_1(a,b;c;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \lambda^n $$

die hypergeometrische Reihe. Hier ist $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ das Pochhammer-Symbol für $a \in \mathbb{C}$ und $\Gamma(z)$ die Gamma–Funktion, d.h. $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$ \int_0^1 \frac{t^n\, dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{\pi}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) $$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) (1 Punkt) Leiten Sie folgende Formel her:

$$ {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; \lambda\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda t)}} $$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die hypergeometrische Reihe $F(\lambda) = {}_2F_1(a,b;c;\lambda)$ die Differentialgleichung $\lambda(1-\lambda)F''(\lambda) + (c - (1+a+b)\lambda)F'(\lambda) - abF(\lambda) = 0$ erfüllt.

27. Perioden als hypergeometrische Funktionen

(4 Punkte) Nehmen Sie an, dass e_1, e_2, e_3 reelle Nullstellen von $4x^3 - g_2x - g_3$ sind, und dass $e_1 < e_3 < e_2$. Sei $\lambda = (e_3 - e_1)/(e_2 - e_1) \in (0,1)$. Benützen Sie die Aufgaben 7 und 26 um folgende Formeln für die Perioden ω_1, ω_2 des Gitters L abzuleiten:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; \lambda\right)\\ \omega_1 &= \pi(e_2 - e_1)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; 1-\lambda\right)\end{aligned}$$

28. Hypergeometrische Gleichung in Weierstrass–Form

Sei E eine Familie von elliptischen Kurven gegeben durch $y^2 = 4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)$ parametrisiert durch $a \in \mathbb{C}$. Sei $\gamma \subset E$ eine nicht-triviale geschlossene Kurve auf E, die nicht von a abhängt. Definieren Sie die Periodenintegrale $\varpi_1(a) = \int_\gamma \frac{dx}{y}$ und $\varpi_2(a) = \int_\gamma \frac{xdx}{y}$.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{d^2\varpi_i}{da^2} + P(a)\frac{d\varpi_i}{da} + Q(a)\varpi_i = 0 \qquad i = 1, 2,$$

wobei $P(a)$ und $Q(a)$ zu bestimmende Funktionen in $g_2(a), g_3(a)$ und ihre Ableitungen sind. Drücken Sie dazu die Ableitungen nach a durch Ableitungen nach $g_\alpha(a)$, $\alpha = 2, 3$, aus. Zeigen Sie damit in zwei Schritten, dass

$$\frac{\partial\varpi_i}{\partial g_\alpha} = \sum_j C_{\alpha,j}(a)\varpi_j$$

gilt. Im ersten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{p(x)}{y^3}$ zu $\frac{q(x)}{y}$, wobei $p(x), q(x)$ Polynome sind, in dem Sie die Diskriminante $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$ als $\delta = Ay^2 + B(y^2)'$ schreiben. Lassen Sie dabei totale Ableitungen weg, weil Sie unter dem Integral nichts beitragen. Im zweiten Schritt reduzieren Sie Ausdrücke der Form $\frac{x^n}{y}$ zu den Integranden von ϖ_i, $i = 1, 2$, indem Sie sukzessive x^2 durch y' und $g_2(a)$ ausdrücken, partiell integrieren und danach y durch $\frac{y^2}{y} = \frac{4x^3 - g_2(a)x - g_3(a)}{y}$ ausdrücken. Lassen Sie dabei wieder totale Ableitungen weg.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $P(a), Q(a)$ für die Kubik aus Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nach Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von a mit der hypergeometrischen Differentialgleichung aus Aufgabe 26(c) übereinstimmt und bestimmen Sie die Werte von a, b, c.

Abgabetermin: Dienstag, 11.12.2012 um 10:00 Uhr.