Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 8

Elliptische Punkte und Spitzen auf Modulkurven

29. Elliptische Punkte von Kongruenzgruppen.
Es sei Γ eine Kongruenzgruppe von Γ_1 und $\tau \in \mathcal{H}$ ein elliptischer Punkt. Wir bezeichnen das Bild $\pi(\tau)$ auf der Modulkurve $X(\Gamma)$ unter der Projektion $\pi : \overline{\mathcal{H}} \to X(\Gamma)$ auch als elliptischen Punkt.

    (a) (2 Punkte) Es sei $\Gamma \subset \Gamma_1$ eine endliche Untergruppe. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: Für $\gamma \in \Gamma$ gilt: $|\operatorname{tr}\gamma| < 2$. γ besitzt nur endliche Ordnung, nämlich 3, 4, oder 6. Es gibt ein $\tau \in \mathcal{H}$ gibt mit $\Gamma = \Gamma_\tau$.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $X(\Gamma)$ endlich viele elliptische Punkte besitzt, und dass der Stabilisator Γ_τ endlich und zyklisch ist.

    (c) (1 Punkt) Es sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 18 die Anzahl der elliptischen Punkte der Ordnung 2 und 3 für $\Gamma_0(p)$. Zeigen Sie dazu, dass folgendes gilt: $\gamma\alpha_j(i) = \alpha_j(i)$ für ein $\gamma \in \Gamma_0(p)$ der Ordnung 4 genau dann, wenn $j^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$, und $\gamma\alpha_j(\omega) = \alpha_j(\omega)$ für ein $\gamma \in \Gamma_0(p)$ der Ordnung 6 genau dann, wenn $j^2 - j + 1 \equiv 0 \bmod p$.

30. Verzweigungsindizes von Spitzen.
Sei Γ eine Kongruenzgruppe von Γ_1 der Stufe N und bezeichnen Sie mit Γ_κ den Stabilisator von $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in Γ. Sei $\kappa = \alpha^{-1} \cdot \infty$, $\alpha \in \Gamma_1$.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\alpha\Gamma_\kappa\alpha^{-1} = (\alpha\Gamma\alpha^{-1})_\infty$.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl h gibt, genannt Verzweigungsindex von Γ bei κ, so dass

        i. im Fall $-I \in \Gamma$, $\Gamma_\kappa = \pm\alpha^{-1}\{T^{hn}\}_{n\in\mathbb{Z}}\,\alpha$;

        ii. im Fall $-I \notin \Gamma$, entweder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1}\{T^{hn}\}_{n\in\mathbb{Z}}\,\alpha$,
        oder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1}\{(-T^h)^n\}_{n\in\mathbb{Z}}\,\alpha$.

Zeigen Sie, dass h ein Teiler von N ist. Im Fall (i) ist der Verzweigungspunkt κ vom Typ I, im Fall (ii) vom Typ IIa bzw. IIb.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass h und der Typ (I,IIa oder IIb) von κ unabhängig von der Wahl von $\alpha \in \Gamma$ ist und dass sie nur von der Γ-Äquivalenzklasse abhängen.

(d) (1 Punkt) Finden Sie mit Hilfe der Aufgaben 19 und 20 die Verzweigungsindizes von Γ an allen Spitzen für $\Gamma = \Gamma_0(p)$, $\Gamma_0(p^2)$ und $\Gamma(2)$, wobei p eine Primzahl ist.

31. Abbildungsgrad zwischen Modulkurven.
Es seien Γ und Γ' Kongruenzgruppen von Γ_1 und $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, so dass $\alpha\Gamma\alpha^{-1} \subset \Gamma'$ (cf. Aufgabe 15).

 (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Gamma\tau \mapsto \Gamma'\alpha\tau$ eine holomorphe Abbildung $f : X(\Gamma) \to X(\Gamma')$ definiert.

 (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Grad dieser Abbildung gilt:

$$\deg f = [\{\pm \mathbb{1}\}\Gamma' : \{\pm \mathbb{1}\}\Gamma] = \begin{cases} [\Gamma' : \Gamma]/2 & \text{falls } -\mathbb{1} \in \Gamma' \text{ und } -\mathbb{1} \notin \Gamma \\ [\Gamma' : \Gamma] & \text{sonst} \end{cases}$$

32. Das Geschlecht von $X_0(p)$.
(4 Punkte) Betrachten Sie die Modulkurve $X_0(p)$ für eine Primzahl p und setzen Sie $k = p + 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus den Aufgaben 20 und 29 bis 31, dass gilt:

$$g(X_0(p)) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & k \equiv 2 \bmod 12 \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$$

Abgabetermin: Dienstag, 18.12.2012 um 10:00 Uhr.