Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Phys. Magnus Engenhorst
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Modulformen I
WS 12/13

Übungsblatt 9

Ableitungen von Modulformen

33. Einige Transformationsformeln der Ramanujan– und Maass–Ableitung.

 (a) (2 Punkte) Sei $f \in M_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$D^n f = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{(k+r)_{n-r}}{(4\pi y)^{n-r}} \partial^r f$$

 (b) (2 Punkte) Sei $f \in QM_k^{(\leq p)}(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(c\tau + d)^{-k-2r}(D^r f)(\gamma \cdot \tau) =$$

$$\sum_{i=0}^{p+r} \left(\sum_{j=0}^{r} \frac{j!}{(2\pi i)^j} \binom{r}{j} \binom{k+r-i+j-1}{j} D^{r-j} f_{i-j}(\tau) \right) \left(\frac{c}{c\tau+d} \right)^i$$

 für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \Gamma_1$.

34. Weitere Kongruenzen für die Ramanujan τ–Funktion.

 (a) (2 Punkte) Benützen Sie die Relationen zwischen geeigneten Eisensteinreihen, um σ_5 durch σ_1 und σ_3, und σ_7 durch σ_1 und σ_5 auszudrücken.

 (b) (2 Punkte) Benützen Sie die Rankin-Cohen-Klammer von geeigneten Eisensteinreihen, um zu zeigen, dass $\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \bmod 7$ und $\tau(n) \equiv n\sigma_9(n) \bmod 5^2$.

35. Ableitungen von schwach holomorphen Modulformen

 (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt: Falls $f \in M_2^!(\Gamma_1)$, dann gibt es ein $g \in M_0^!(\Gamma_1)$ mit $f = Dg$.

 (b) (1 Punkt) Sei $g \in M_{2-k}^!(\Gamma_1)$. Dann verschwindet der konstante Term der Fourier–Reihenentwicklung von $D^{k-1}g$.

36. Eine erzeugende Funktion für schwach holomorphe Modulformen

(a) (1 Punkt) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$Dj = -\frac{E_{14}}{\Delta}, \quad (Dj)^2 = E_4\, j\, (j - 1728).$$

(b) (2 Punkte) Es seien $k = 12\ell + k'$ und $f_{k,m} \in M_k^!(\Gamma_1)$ wie in Aufgabe 24. Beweisen Sie folgende Integralformel

$$f_{k,m}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Delta^\ell(z) E_{k'}(z) E_{14-k'}(\tau)}{\Delta^{1+\ell}(\tau)(j(\tau) - j(z))} q^{-m-1} \mathrm{d}q,$$

wobei C ein Kreis um 0 in der q–Ebene mit genügendem kleinem Radius ist.

Wenden Sie dazu Cauchys Integralformel auf $F_{k,D}(j)$ an und verwenden Sie Aufgabe a) um die Variable zu transformieren.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_{m \geq -\ell} f_{k,m}(z) q^m = \frac{f_k(z) f_{2-k}(\tau)}{j(\tau) - j(z)}.$$

wobei $f_k = \Delta^\ell E_{k'}$.

Beachten Sie, dass die rechte Seite antisymmetrisch unter gleichzeitigem Vertauschen von z und τ, sowie k und $2 - k$ ist. Dies ist eine Manifestation der sogenannten Serreschen Dualität.

Abgabetermin: Dienstag, 8.1.2013 um 10:00 Uhr.