Dr. habil. Emanuel Scheidegger
Dipl. Math. Magnus Engenhorst

Modulformen I
WS 12/13
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 1

Geometrie elliptischer Kurven im projektiven Raum

1. Glattheit ebener projektiver Kurven

   (a) (1 Punkt) Es sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei $\widetilde{F}(x,y,z) \in k[x,y,z]$ homogen vom Grad n. Beweisen Sie die Eulersche Gleichung

   $$x\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} + y\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} + z\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z} = n\widetilde{F}.$$

   (b) (1 Punkt) Es sei C die Kurve $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ und $\widetilde{C}$ ihr projektiver Abschluss. Zeigen Sie, daß $\widetilde{C}$ im Punkt $(x_0 : y_0 : z_0)$ genau dann nicht glatt ist, wenn

   $$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z} = 0.$$

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Bedingung für einen glatten Punkt in Aufgabe (b) unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, d.h. sie ist unverändert nach einem Koordinatenwechsel $(x' : y' : z') = A(x : y : z)$, wobei $A \in \mathrm{GL}(3,k)$.

   (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine Tangente an $\widetilde{C}$ durch einen glatten Punkt $(x_0 : y_0 : z_0)$ die Gleichung $ax + by + cz = 0$ erfüllt, wobei

   $$a = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(x_0 : y_0 : z_0), \quad b = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x_0 : y_0 : z_0), \quad c = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z}(x_0 : y_0 : z_0),$$

   indem Sie die Tangentenbedingung für C homogenisieren.

2. Wendepunkte ebener projektiver Kurven

   (a) (1 Punkt) Es seien $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ und $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{P}^2_k$. Zeigen Sie, daß die Gerade, die P_1 und P_2 verbindet, wie folgt parametrisiert werden kann: $\{sP_1 + tP_2 \mid (s : t) \in \mathbb{P}^1_k\}$. Überprüfen Sie, daß diese lineare Abbildung $\mathbb{P}^1_k$ (mit Koordinaten $(s : t)$) bijektiv auf die Gerade $\overline{P_1P_2} \subset \mathbb{P}^2_k$ abbildet.

(b) (2 Punkte) Es sei $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wenn die Kurve $\{F(x,y) = 0\}$ aus Aufgabe 1 im Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ glatt ist und eine nicht-vertikale Tangente besitzt, dann kann die implizite Funktion $y = f(x)$ in eine Taylor-Reihe um $x = x_1$ entwickelt werden. Der lineare Term gibt die Tangente. Wenn wir den linearen Term subtrahieren, erhalten wir:

$$f(x) - y_1 - f'(x)(x - x_1) = a_m(x - x_1)^m + \dots, \quad a_m \neq 0.$$

m heisst die Ordnung der Tangente. Der Punkt (x_1, y_1) heisst Wendepunkt wenn $m > 2$, d.h. $f''(x_1) = 0$. Es sei $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$, $z_1 \neq 0$ und sei $L = \overline{P_1 P_2}$ eine Tangente an die Kurve $F(x,y) = \widetilde{F}(x,y,1)$ im glatten Punkt P_1. Es sei $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$. Zeigen Sie, dass m die niedrigste Potenz von t in $\widetilde{F}(x_1 + tx_2, y_1 + ty_2, z_1 + tz_2) \in k[t]$ ist.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß m sich unter linearen Koordinatenwechseln von $\mathbb{P}^2_k$ nicht ändert.

3. Tangente im Unendlichen einer elliptischen Kurve
(4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Gerade im Unendlichen $L = \{z = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ eine Tangente an die elliptische Kurve $E = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x)\}$ im Punkt $(0:1:0)$ ist, und dass $(0:1:0)$ ein Wendepunkt von E ist.

4. Die projektive elliptische Kurve als Mannigfaltigkeit
Der komplex-projektive Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ist die Menge der Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{C}^{n+1}$. Wir identifizieren zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$ auf einer Geraden mittels der Äquivalenzrelation, daß $z \sim w$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ gibt, so daß $z = \lambda w$. Dann:

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\right) / \sim .$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$ mit $U_i = \{z = (z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ und $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n, z \mapsto \left(\xi^{(i)}_0, \dots, \widehat{\xi_i{}^{(i)}}, \dots, \xi^{(i)}_n\right)$ ein wohldefinierter holomorpher Atlas ist, wobei $\xi^{(i)}_j(z) = z_j/z_i$ und $\widehat{\xi_i{}^{(i)}}$ bedeutet, dass $\xi^{(i)}_i$ weggelassen wird. Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen $\psi_{ji} = \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_I \cap Uj) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß eine elliptische Kurve E eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, daß $\{(U_i \cap E, \varphi_i|_E)\}_{i=0,1,2}$ als Atlas geeignet ist. Alternativ zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, daß E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ist.

Abgabetermin: Dienstag, 30. 10. 2012 um 10:00 Uhr.