Übungsblatt 1

Abgabe: 29. Oktober, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

In folgenden sei $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen.

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (d.h. für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist auch $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ offen) genau dann, wenn

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

ist glatt.

(b) (1 Punkt) Es gibt eine glatte Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

(i) $h(t) \equiv 1$ falls $t \leq 1$,

(ii) $0 < h(t) < 1$ falls $1 < t < 2$,

(iii) $h(t) \equiv 0$ falls $t \geq 2$.

Hinweis: Betrachten Sie $\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t-1)}$.

(c) (1 Punkt) Es gibt eine glatte Funktion $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

(i) $0 \leq H(x) \leq 1$ überall,

(ii) $H \equiv 1$ auf $B_1(0)$,

(iii) $H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$,

wobei $B_r(p)$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius r um p ist.

Definition: Wir sagen, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ *Hausdorff* ist, wenn

$$\forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y, \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ so dass } x \in U, y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Aufgabe 3: (Die reelle Gerade mit einem doppelten Punkt) Sei $X = \mathbb{R} \cup \{\star\}$ mit $\star \notin \mathbb{R}$. Sei

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \text{entweder } U \subset \mathbb{R} \text{ offen oder } (U \setminus \{\star\}) \cup \{0\} \subset \mathbb{R} \text{ offen}\}.$$

- (a) Geben Sie zwei Mengen U_1, U_2 in $\mathcal{T}$ an, so dass U_1 den Punkt $\star$ enthält, und U_2 nicht.
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert.
- (c) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ nicht Hausdorff ist.
- (d) Gibt es eine andere Topologie auf X , die Hausdorff ist?

Aufgabe 4:

- (a) Zeigen Sie: die Vereinigung der zwei Koordinaten-Achsen in $\mathbb{R}^2$ ist keine Untermannifaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Betrachten Sie, was in einer Umgebung von 0 passiert, wenn 0 entfernt ist.
- (b) Zeigen Sie: Falls $a \neq 0$, dann ist $\mathcal{P}_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a\}$ eine Untermannifaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Warum ist $\mathcal{P}_0$ keine Untermannifaltigkeit von $\mathbb{R}^3$?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.