Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
30. Oktober, 2013

Übungsblatt 2

Abgabe: 5. November, 2013

Aufgabe 5:

(a) (1 Punkt) Es sei M eine glatte m-dimensionale Mannifaltigkeit, so dass die Inklusion $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion ist, d.h. ι ist glatt, und $D\iota_p$ ist injektiv für alle $p \in M$. Zeigen Sie: Dann gilt $m \leq n$.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine glatte, m-dimensionale Untermannifaltigkeit;

(ii) M ist eine glatte m-dimensionale Mannifaltigkeit, so dass $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion ist.

Aufgabe 6: Es seien M, N und P glatte Mannifaltigkeiten. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Jede glatte Abbildung $f\colon M \to N$ ist stetig.

(b) (1 Punkt) Falls $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$ glatt sind, dann ist $g \circ f\colon M \to P$ auch glatt.

(c) (2 Punkte) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Abbildung $f\colon M \to N$ ist glatt;

(ii) Die Abbildung $g \circ f$ ist für alle glatten Funktionen $g\colon N \to \mathbb{R}$ glatt;

(iii) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p, so dass $f|_U$ glatt ist.

Definition: Es seien X eine Menge und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Wir sagen, dass $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$ ist, wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

Aufgabe 7: (*Projektiver Raum*) Wir definieren

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{L \mid L \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{1-dimensionaler Unterraum}\}.$$

Sei $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Abbildung $\pi(x) = L_x$, wobei $L_x \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die einzige Gerade durch 0 und x ist.

(a) (1 Punkt) Beschreiben Sie die feinste Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so dass die Abbildung $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ stetig ist. (Hier hat $\mathbb{R}^{n+1}$ die Standardtopologie und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die induzierte Topologie.)

(b) (1 Punkt) Für jedes $i = 1, \ldots, n+1$ sei

$$\tilde{U}_i = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ offen in der obigen Topologie auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist.

(c) (2 Punkte) Es seien $\tilde{\varphi}_i\colon \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

und $\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi_i(L_x) = \tilde{\varphi}_i(x)$. Zeigen Sie, dass φ_i wohldefiniert ist, und dass $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ einen glatten Atlas der Dimension n für $\mathbb{RP}^n$ bildet.

Aufgabe 8: Es sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Es sei

$$\xi\colon\ S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0\} \to (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2$$

die Karte von S^2 gegeben durch

$$\xi^{-1}(\theta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

(a) (2 Punkte) Für $p \in S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 \mid y = 0\}$ bestimmen Sie Kurven γ_θ, γ_φ, so dass die Vektoren $\partial_\theta|_p$, $\partial_\varphi|_p \in T_pS^2$ die Richtungsableitung entlang γ_θ und γ_φ sind. Berechnen Sie $v_\theta = \dot{\gamma}_\theta(0)$, $v_\varphi = \dot{\gamma}_\varphi(0) \in \mathbb{R}^3$.

(b) (1 Punkt) Es sei $n_p = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$\partial_\theta|_p \mapsto v_\theta \qquad \partial_\varphi|_p \mapsto v_\varphi$$

einen linearen Isomorphismus

$$T_pS^2 \to \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, n_p\rangle = 0\}$$

induziert, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie $\langle v_\theta, v_\theta\rangle$, $\langle v_\theta, v_\varphi\rangle$, und $\langle v_\varphi, v_\varphi\rangle$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.