Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
6. November, 2013

Übungsblatt 3

Abgabe: 12. November, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 9: *(Das Kotangentialbündel)* Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannifaltigkeit. Für jedes $p \in M$ sei $T_p^*M := (T_pM)^*$ der Dualraum des Tangentialraums T_pM. Zeigen Sie, dass $T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$ mit $\pi \colon T^*M \to M$, $\pi|_{T_p^*M} \equiv p$, auf natürliche Weise ein Vektorbündel vom Rang n über M bildet.

Definition: Ein Vektorbündel $\pi \colon E \to M$ vom Rang n heißt *trivial*, wenn eine Trivialisierung $h : M \times \mathbb{R}^n \to E$ über ganz M existiert.

Aufgabe 10:

(a) (1 Punkt) Es sei $\pi \colon E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang n. Zeigen Sie: E ist trivial genau dann, wenn es n glatte Schnitte $\{s_1, \dots, s_n\}$ hat, so dass die Vektoren $\{s_1(p), \dots, s_n(p)\} \subset \pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in M$ linear unabhängig sind.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass TS^1 ein triviales Vektorbündel vom Rang 1 über dem Einheitskreis S^1 ist.

(c) (1 Punkt) Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre. Wir definieren

$$N := \{(p, v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \mid v \mid\mid \overrightarrow{Op}\}.$$

Zeigen Sie, dass N mit $\pi : N \to S^2$, $\pi(p, v) := p$ ein triviales Vektorbündel vom Rang 1 über S^2 bildet. (Das Vektorbündel heißt das *Normalen-Bündel* der S^2 in $\mathbb{R}^3$.)

Aufgabe 11:

(a) (1 Punkt) Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Beschreiben Sie die feinste Topologie $\mathcal{T}_Y$ auf der Menge $Y = X/\sim$ der Äquivalenzklassen, so dass die kanonische Abbildung $q \colon X \to Y$ stetig ist. (Diese Topologie nennt man die *Quotiententopologie*.)

(b) (3 Punkte) *(Das Möbius-Bündel)* Es sei $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie versehen und die Äquivalenzrelation $(x, y) \sim (x + n, (-1)^n y)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Es sei $M = \mathbb{R}^2/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie:

(i) M hat eine glatte Mannifaltigkeit-Struktur mit der Quotiententopologie.

(ii) Mit der Abbildung $\pi \colon M \to S^1$, definiert durch $\pi([x, y]) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, bildet M ein Vektorbündel vom Rang 1 über S^1, das *Möbius-Bündel*.

(iii) Das obige Möbius-Bündel ist kein triviales Vektorbündel über S^1.

Definition: Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume und $p_1 : X \times Y \to X$, $p_2 : X \times Y \to Y$ die kanonischen Projektionen. Es sei $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie (die Topologie mit den wenigsten offenen Mengen) auf $X \times Y$, bezüglich der die Projektionen $p_1,\ p_2$ stetig sind. Diese Topologie nennt man die *Produkttopologie*.

Aufgabe 12:

(a) Es seien M und N zwei glatte Mannifaltigkeiten der Dimensionen m bzw. n. Zeigen Sie, dass $M \times N$ eine glatte $(m+n)$-dimensionale Mannifaltigkeit mit der Produkttopologie bildet.

(b) Es sei $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie versehen und die Äquivalenzrelation

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_1 + k_1, \ldots, x_n + k_n)$$

für alle $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $T^n := \mathbb{R}^n / \sim$ der Äquivalenzklassen eine n-dimensionale Mannifaltigkeit-Struktur mit der Quotiententopologie (siehe Aufgabe 11) hat.

(c) Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis. Zeigen Sie, dass T^n und $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ mal}}$ diffeomorph sind.

(d) Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel $T(T^n)$ trivial ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.