Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
19. November, 2013

Übungsblatt 5

Abgabe: 26. November, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Die Universaldefinition des Tensorprodukts von zwei Vektorräumen: Es seien V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$. Ein *Tensorprodukt* von V und W ist ein Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $B\colon V \times W \to V \otimes W$, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jede bilineare Abbildung $\varphi\colon V \times W \to U$ mit U einem anderen Vektorraum gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\Phi\colon V \otimes W \to U$, so dass $\Phi \circ B = \varphi$ gilt.

Der Vektorraum $V \otimes W$ ist bis aus Isomorphie eindeutig (Siehe Aufgabe 17(a)). Für $v \in V$ und $w \in W$ schreiben wir $v \otimes w := B(v, w)$. Ein Element in $V \otimes W$ von dieser Form, d.h. $v \otimes w$ mit $v \in V$ und $w \in W$, heißt ein *reiner Tensor*.

Aufgabe 17: Es seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie (Hinweis: mit Hilfe der universellen Eigenschaft):

(a) Der Vektorraum $V \otimes W$ ist bis aus Isomorphie eindeutig.

(b) Es gilt $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.

Hinweis: Zeigen Sie: Falls $\{e_i \mid 1 \leq i \leq \dim V\} \subset V$ und $\{f_j \mid 1 \leq j \leq \dim W\} \subset W$ Basen sind, dann ist $\{e_i \otimes f_j\}$ eine Basis von $V \otimes W$.

(c) Es gibt kanonische Isomorphismen (d.h. sie sind nicht von einer Wahl der Basis abhängig) $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$ und $(V \otimes W)^* \cong \{T\colon V \times W \to \mathbb{R} \text{ bilinear}\}$.

(d) Es gilt $T^r_s V \cong \{L\colon \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \text{ mal}} \to \mathbb{R} \mid L \text{ ist } \mathbb{R}\text{-multilinear}\}$, wobei $T^r_s V := V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$.

Aufgabe 18: (*Operationen auf Vektorbündeln.)* Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \xrightarrow{\pi_E} M$, $F \xrightarrow{\pi_F} M$ zwei Vektorbündel über M. Die folgenden Mengen sind in natürlicher Weise Vektorbündel über M. Beweisen Sie dies für (a) und (d); (b) und (c) sind freiwillig.

(a) $E^* := \bigsqcup_{p \in M} E_p^*$,

(b) $E \oplus F := \bigsqcup_{p \in M} E_p \oplus F_p$,

(c) $\mathrm{Hom}(E, F) := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Hom}(E_p, F_p)$,

(d) $E \otimes F := \bigsqcup_{p \in M} E_p \otimes F_p$.

Definition: Der Raum der glatten Schnitte eines glatten Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi_E} M$ über einer glatten Mannigfaltigkeit M wird mit $\Gamma(M, E)$ bezeichnet.

Aufgabe 19: Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \xrightarrow{\pi_E} M$, $F \xrightarrow{\pi_F} M$ zwei Vektorbündel über M. Zeigen Sie, dass die folgenden Isomorphismen gelten:

(a) $E^* \otimes F \cong \mathrm{Hom}(E, F)$ als Vektorbündel über M,

(b) $\Gamma(M, E^* \otimes F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(\Gamma(M, E), \Gamma(M, F))$.

Aufgabe 20: Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $T_s^r(M)$ das Vektorbündel

$$T_s^r(M) := (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$$

über M. (Man nennt es das *Vektorbündel der (p, q)-Tensoren von M.*) Zeigen Sie:

(a) $\Gamma(M, T_s^r(M)) \cong \mathscr{T}_s^r(M)$.

Hinweis: Zeigen Sie erst: Falls $E \xrightarrow{\pi_E} M$, $F \xrightarrow{\pi_F} M$ zwei Vektorbündel über M sind, dann gilt $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(\Gamma(M, E \otimes F), \mathscr{F}(M)) \cong \{A\colon\ \Gamma(M, E) \times \Gamma(M, F) \to \mathscr{F}(M) \mid A \text{ ist } \mathscr{F}(M)\text{-bilinear}\}$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(\mathscr{T}_s^r(M), \mathscr{T}_q^p(M)) \cong \mathscr{T}_{q+r}^{p+s}(M)$.

(c) $\mathscr{T}_s^r(M) \cong \{A\colon\ \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \ldots \mathscr{X}(M)}_{s \text{ mal}} \to \underbrace{\mathscr{X}(M) \times \ldots \mathscr{X}(M)}_{r \text{ mal}} \mid A \text{ ist } \mathscr{F}(M)\text{-multilinear}\}$

(d) Die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ entspricht keinem Tensorfeld.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.