Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
4. Dezember, 2013

Übungsblatt 7

Abgabe: 10. Dezember, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 25: Es seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie:

$$DF([X,Y]) = [DF(X), DF(Y)] \quad \text{für alle } X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Definition: Es seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $F : M \to N$ heißt *Isometrie*, wenn $g = F^*h$, d.h

$$h_{F(p)}(DF_p(v), DF_p(w)) = g_p(v, w) \quad \text{für alle } v, w \in T_pM \text{ und alle } p \in M.$$

Aufgabe 26: *Der Hyperbolische Raum*
Es seien $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ der $(n+1)$-dimensionale Minkowski-Raum mit Skalarprodukt $\langle v, w\rangle_1 = -v^0w^0 + \sum_{i=1}^n v^iw^i$ und

$$\mathcal{H}^n := \{p = (p^0, \ldots, p^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p\rangle_1 = -1 \text{ und } p_0 > 0\}$$

mit der induzierten Metrik $g := j^*g_{\text{Mink}}$. Aus Ausgabe 24 wissen wir, dass $(\mathcal{H}^n, g)$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Mann nennt sie das *Hyperboloid-Modell des Hyperbolischen Raumes.*

(a) *Das Poincaré-Ball-Modell des Hyperbolischen Raumes*
Es seien $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g^P_x := \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx^i_{|x} \otimes dx^i_{|x}.$$

Zeigen Sie, dass die pseudo-stereographische Projektion vom Pol $s = (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, definiert durch die Formel

$$F(p) := \frac{1}{1 + p^0}(p^1, \ldots, p^n),$$

eine Isometrie von $(\mathcal{H}^n, g)$ nach $(\mathbb{B}^n, g^P)$ ist.

(b) *Das Obere-Halbraum-Modell des Hyperbolischen Raumes*
Es sei $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g^H_x := \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n dx^i_{|x} \otimes dx^i_{|x}.$$

Zeigen Sie, dass die pseudo-Inversion des $\mathbb{R}^n$ mit Pol $t = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$, definiert durch die Formel

$$G(x) := t + 2\frac{x - t}{\|x - t\|^2},$$

eine Isometrie von $(\mathbb{B}^n, g^P)$ nach $(\mathbb{H}^n, g^H)$ ist.

Aufgabe 27: *Der Kegel mit Öffnungswinkel* 2α
Es seien $\alpha \in (0, \pi)$ und $\mathcal{K}_\alpha$ die Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Parametrisierung

$$S(u, \theta) := (u \sin\alpha \cos\theta, u \sin\alpha \sin\theta, u \cos\alpha) \quad \text{mit } u \in (0, +\infty) \text{ und } \theta \in [0, 2\pi].$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die von $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik g_α auf $\mathcal{K}_\alpha$ in Koordinaten (u, θ).

(b) (2 Punkte) Es sei C_u die geschlossene Kurve auf $\mathcal{K}_\alpha$ parametrisiert durch $\gamma_u \colon [0, 2\pi] \to \mathcal{K}_\alpha$ mit

$$\gamma_u(\theta) = (u \sin\alpha \cos\theta, u \sin\alpha \sin\theta, u \cos\alpha).$$

Für $X(0) \in T_{\gamma_u(0)}\mathcal{K}_\alpha$ sei $X(\theta)$ das entsprechende parallele Vektorfeld entlängs $\gamma_u(\theta)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen $X(0)$ und $X(2\pi)$. Mann nennt diesen Winkel den *Drehwinkel der Parallelverschiebung längs der Kurve* C_u.

(c) (1 Punkt) Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der runden Metrik. Berechnen Sie den Drehwinkel der Parallelverschiebung längs eines Kreises auf S^2 der Länge $L_\alpha = 2\pi \sin\alpha$ mit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Hinweis: Betrachten Sie diesen Kreis als den Kegelschnitt von einem Kegel mit Öffnungswinkel 2α.

Aufgabe 28: Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der runden Metrik.

(a) Zeigen Sie, dass eine Geodätische auf S^2 immer Teil eines mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierten Großkreises ist.

(b) Es seien A, B, $C \in S^2$, so dass nicht alle auf einem Großkreis liegen, und es sei ABC die Fläche auf der Sphäre, die von den kurzen Geodätischen zwischen A und B, B und C, bzw. C und A begrenzt ist. Es sei α der *Innenwinkel* in A, d.h. der Winkel zwischen den Tangenten in A von den kurzen Geodätischen von A nach B, bzw. von A nach C. Ähnlich definieren wir β und γ, die Innenwinkel in B bzw. C. Wir nennen ABC ein *sphärisches Dreieck auf* S^2 *mit Winkeln* α, β, *bzw.* γ. Bestimmen Sie den Drehwinkel der Parallelverschiebung längs dieses Dreiecks in Abhängigkeit von α, β, und γ.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.