Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
11. Dezember, 2013

Übungsblatt 8

Abgabe: 17. Dezember, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 29: Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Das *Exponential* e^A von A ist durch die folgende Potenzreihe definiert:

$$e^A := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass diese Reihe immer konvergiert, d.h. das Exponential von A wohldefiniert ist. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $e^A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$.

(b) Für jedes $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist die Abbildung $\varphi_A \colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot)$ definiert durch $\varphi_A(t) := e^{tA}$ ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Falls $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $[A, B] \neq 0$, wobei $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$, dann gilt $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ nicht unbedingt.

(d) Die Abbildung

$$\exp\colon \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t + A = 0\} \longrightarrow \mathrm{SO}(3),$$

definiert durch $\exp(A) := e^A$, ist wohldefiniert.

Aufgabe 30: Es sei $\mathrm{SU}(2) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^t \cdot A = E \text{ und } \det A = 1\}$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $SU(2)$ eine Lie-Gruppe ist, und dass $T_E\mathrm{SU}(2) = \{B \in M_2(\mathbb{C}) \mid \bar{B}^t + B = 0 \text{ und } \operatorname{tr} B = 0\}$ gilt.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrizen $\sigma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eine Basis von $T_E\mathrm{SU}(2)$ bilden. Berechnen Sie $[\sigma_i, \sigma_j]$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(2)$ diffeomorph zur Einheitsphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie S^3 als $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ und die Abbildung $\Phi : S^3 \to SU(2)$ definiert durch $\Phi(z, w) = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$.

Aufgabe 31: Es sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der zwei-dimensionale Torus.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\Phi(\theta, \varphi) := ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)\,,$$

eine Einbettung $\bar{\Phi}$ von T^2 in $\mathbb{R}^3$ induziert, d.h. $\bar{\Phi}$ ist eine Immersion und ein Homöomorphismus von T^2 auf sein Bild $\bar{\Phi}(T^2) = \Phi(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ (in der Teilraumtopologie).

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, definiert durch

$$\Psi(\theta, \varphi) := (\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi)\,,$$

eine Einbettung $\bar{\Psi}$ von T^2 in $\mathbb{R}^4$ induziert.

(c) Betrachten Sie die beiden Tori $M_1 = \operatorname{Im}\bar{\Phi} \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik g_1 von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ und $M_2 = \operatorname{Im}\bar{\Psi} \subset \mathbb{R}^4$ mit der induzierten Metrik g_2 von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass $\bar{\Psi} \circ \bar{\Phi}^{-1} : M_1 \to M_2$ keine Isometrie ist.

(d) Es seien (M, g) und (N, h) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F\colon (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie. Falls $\gamma : (a, b) \to M$ eine Geodätische auf (M, g) ist, dann ist $F \circ \gamma : (a, b) \to N$ eine Geodätische auf (N, h).

Aufgabe 32: Es sei

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(H, \cdot)$ eine Lie-Gruppe bildet. Mann nennt sie die *Heisenberggruppe.*

(b) (2 Punkte) Es seien die Vektorfelder

$$A = \frac{\partial}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{und} \quad C = \frac{\partial}{\partial z}$$

definiert durch die Identifizierung von H mit $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass diese Vektorfelder linksinvariant sind, und berechnen Sie ihre Lie-Klammern.

(c) (1 Punkt) Es sei g die Riemannsche Metrik auf H mit der Eigenschaft, dass $\{A_h, B_h, C_h\}$ eine orthonormale Basis für T_hH für alle $h \in H$ ist. Berechnen Sie

$$\nabla_A B,\ \nabla_B A,\ \nabla_B C,\ \nabla_C B,\ \nabla_C A,\ \nabla_A C,\ \nabla_A A,\ \nabla_B B,\ \nabla_C C.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.