Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
15. Januar, 2013

# Übungsblatt 11

Abgabe: 21. Januar, 2014

*Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.*

**Aufgabe 41:** (Die erste Variations-Formel des Energiefunktionales) Es sei $(M, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $p, q \in M$ sei

$$\Omega_{pq} := \{\gamma : [0,1] \to M \mid \gamma \text{ glatt und } \gamma(0) = p,\, \gamma(1) = q\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Variation $H : [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von $\gamma \in \Omega_{pq}$ mit Variationsvektorfeld $Y$ gilt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}E(\gamma_s)\big|_{s=0} = [g(Y(t), \dot\gamma(t))]_0^1 - \int_0^1 g(Y(t), \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t))\; dt,$$

wobei $\gamma_s : [0,1] \to M$ durch $\gamma_s(t) := H(t,s)$ definiert ist und $E(\gamma)$ die Energie der Kurve $\gamma$ ist.

(b) Die kritschen Punkte von $E : \Omega_{pq} \to \mathbb{R}$, d.h. die Kurven $\gamma \in \Omega_{pq}$ mit

$$\frac{d}{ds}E(\gamma_s)\big|_{s=0} = 0$$

für alle Variationen mit festen Endpunkten, sind gerade die Geodätischen von $p$ nach $q$.

**Aufgabe 42:**

(a) Es sei $G$ eine Liegruppe mit einer biinvarianten Metrik $g$. Zeigen Sie: Es gilt

$$g(R(X,Y)Z,T) = \frac{1}{4}g([X,Y],[Z,T])$$

für alle $X, Y, Z, T \in \mathscr{X}^G(G)$. Folgern Sie, dass die Schnittkrümmung überall nicht-negativ ist, falls $g$ positiv definit ist.

(b) Es seien $G = \mathrm{SU}(2)$ und $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{X}^G(G)$ mit $X_i(E) = \sigma_i$ (siehe Aufgabe 34.) Es sei $g$ die biinvariante Metrik auf $G$ mit $\langle\sigma_i, \sigma_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$ (siehe Aufgabe 35). Berechnen Sie die Schnittkrümmung dieser Metrik.

*Hinweis:* Die Schnittkrümmung ist konstant.

**Aufgabe 43:** (Jacobi-Vektorfelder aus der runden Sphäre)
Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre mit der von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik. Weiter sei $x \in S^n$ und $v \in T_x S^n$ mit $\|v\| = 1$.

(a) Zeigen Sie: Die Geodätische durch $x$ mit $\dot\gamma(0) = v$ ist $\gamma(t) = \cos t \cdot x + \sin t \cdot v$.

(b) Es sei $u \in T_x S^n$ mit $u \perp v$ und $\|u\| = 1$. Zeigen Sie, dass

$$H(t,s) = \cos t \cdot x + \sin t \cdot (\cos s \cdot v + \sin s \cdot u)$$

eine geodetische Variation von $\gamma$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass das von $H$ induzierte Jacobi-Vektorfeld genau $J(t) = \sin t \cdot U(t)$ ist, wobei $U(t)$ das Vektorfeld entlang $\gamma$ mit $U(t) = u$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung von $S^n$ konstant, und zwar überall 1 ist.

*Definition:* Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum. Zwei geordnete Basen von $V$ heißen *gleichorientiert*, wenn die Determinante der Basiswechselmatrix positiv ist. Das definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen von $V$. Eine *Orientierung* von $V$ ist eine Äquivalenzklasse von gleichorientierten Basen. Falls $\mathcal{O}$ so eine Äquivalenzklasse ist, heißen die Basen in $\mathcal{O}$ *positiv* bezüglich der Orientierung $\mathcal{O}$.

Eine glatte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$ heißt *orientierbar*, wenn es möglich ist, alle Tangetialräume $T_pM$ mit einer bezüglich $p \in M$ glatten Wahl $\mathcal{O}_p$ der Orientierungen zu versehen. D.h. für jedes $p \in M$ existiert eine Karte $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ um $p$, so dass für alle $q \in U$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q \right\} \subset T_qM$$

eine positiv orientierte Basis bezüglich $\mathcal{O}_q$ ist.

**Aufgabe 44:** Zeigen Sie:

(a) Eine glatte Mannigfaltigkeit $M$ ist orientierbar genau dann, wenn ein Atlas $\mathcal{A}$ von $M$ existiert, so dass für alle Karten $(U^\varphi, \varphi)$, $(U^\psi, \psi) \in \mathcal{A}$ und für alle $x \in \psi(U^\varphi \cap U^\psi)$

$$\det(D(\varphi \circ \psi^{-1})_x) > 0$$

gilt.

(b) $S^n$ ist orientierbar für alle $n \geq 1$.

*Bemerkung:* Wer Zeit und Lust hat, kann jetzt (freiwillig) zeigen, dass der Totalraum des Möbius-Bündels nicht orientiertbar ist (siehe Aufgabe 11(b)) und dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ orientierbar ist, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ aber nicht. Letztere Aussage können Sie dann auf alle projektiven Räume $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ verallgemeinern.

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*