Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
29. Januar, 2014

Übungsblatt 13

Abgabe: 4. Februar, 2014

Freiwillig

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 49: Es seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in \mathscr{F}(M)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{grad}(f)$ steht senkrecht auf allen Niveauflächen von f, also auf jedem $E_c := \{x \in M \mid f(x) = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$ einem regulären Wert von f.

(b) Die Hesseform $\mathrm{Hess}(f)(X, Y) := g(\nabla_X(\mathrm{grad}(f)), Y)$ von f ist eine symmetrische Bilinearform.

Aufgabe 50: (Jacobi-Vektorfelder auf dem Hyperbolischen Raum) Es sei $(\mathcal{H}^n, g)$ das Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raumes (siehe Aufgabe 26). Es seien $p \in \mathcal{H}^n$ und $v \in T_p\mathcal{H}^n$ mit $\|v\| = 1$.

(a) Zeigen Sie: Die Geodätische durch p mit $\dot{\gamma}(0) = v$ ist $\gamma(t) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot v$.

(b) Es sei $u \in T_p\mathcal{H}^n$ mit $u \perp v$ und $\|u\| = 1$. Zeigen Sie, dass

$$H(t, s) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot (\cos s \cdot v + \sin s \cdot u)$$

eine geodätische Variation von γ ist.

(c) Zeigen Sie, dass das von H induzierte Jacobi-Vektorfeld genau $J(t) = \sinh t \cdot U(t)$ ist, wobei $U(t)$ das Vektorfeld entlang γ mit $U(t) = u$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung von $\mathcal{H}^n$ konstant, und zwar überall -1 ist.

Aufgabe 51: (Einsteins Zug) Ein Zug der Länge 200m, gemessen in seinem eigenen Inertialsystem, fährt bei Geschwindigkeit $v = \sqrt{3}/2$ durch eine Station mit Länge des Bahnsteiges 100m, gemessen vom Bahnhofswärter.

(a) Welche Länge des Bahnsteigs misst der Schaffner des Zuges?

(b) Wie lang ist der Zug für den Bahnhofswärter?

Aufgabe 52: Es seien (N, h) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $f \in \mathscr{F}(I)$ mit $f(t) > 0$ für alle $t \in I$. Es sei $M := I \times M$ mit der Metrik

$$g_{\varepsilon,f} := \varepsilon \; dt \otimes dt + f(t)^2 h, \quad \text{wobei } \varepsilon \in \{-1, +1\}.$$

Berechnen Sie die Ricci-Krümmung der Metrik $g_{\varepsilon,f}$ bezüglich ε, f und der Ricci-Krümmung von (N, h).

Hinweis: Zeigen Sie, dass falls $(U, \xi = (x^1, \dots, x^n))$ eine Karte auf N ist, dann gilt

$$\mathrm{Ric}^M_{tt} = -n\frac{f''(t)}{f(t)}, \quad \mathrm{Ric}^M_{ti} = \mathrm{Ric}^M_{it} = 0, \quad \mathrm{Ric}^M_{ij} = \mathrm{Ric}^N_{ij} - \frac{1}{\varepsilon} f''(t) f(t) h_{ij}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.