Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
31. Januar, 2014

Übungsblatt 14

Abgabe: 11. Februar, 2014

Freiwillig

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 53: Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihr Levi-Civita-Zusammenhang. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Differentialoperatoren:

(a) $f \in \mathcal{F}(M)$, $A \in \mathscr{T}^r_s(M) \Longrightarrow \nabla(f \cdot A) = A \otimes df + f \cdot \nabla A$;

(b) $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M) \Longrightarrow \mathrm{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \mathrm{grad}(f_2) + f_2 \cdot \mathrm{grad}(f_1)$;

(c) $V \in \mathscr{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M) \Longrightarrow \mathrm{div}(f \cdot V) = V(f) + f \cdot \mathrm{div}(V)$;

(d) $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M) \Longrightarrow \Delta(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \Delta f_2 + f_2 \cdot \Delta f_1 + 2\,\langle \mathrm{grad} f_1, \mathrm{grad} f_2 \rangle$.

Aufgabe 54: Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihre Levi-Civita-Zusammenhang. Für $V \in \mathscr{X}(M)$ ist die *Rotation* definiert als

$$\mathrm{rot} : \mathscr{X}^2(M) \to \mathcal{F}(M) \quad \text{mit} \quad \mathrm{rot}(V)(X, Y) := \langle \nabla_X V, Y \rangle - \langle \nabla_Y V, X \rangle\,.$$

Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) $\mathrm{rot}(V) \in \mathscr{T}^0_2(M)$ ist antisymmetrisch. Finden Sie den Ausdruck in lokalen Koordinaten.

(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0 \quad \forall\ f \in \mathcal{F}(M)$.

(c) für $\theta \in \mathscr{X}^*(M)$ mit $\theta(X) = \langle V, X \rangle\ \forall\ X \in \mathscr{X}(M)$ gilt $\mathrm{rot}(V)(X, Y) = (\nabla_X \theta)(Y) - (\nabla_Y \theta)(X)$.

Aufgabe 55: Es sei $M(0, f)$ die Robertson-Walker Raumzeit mit $k = 0$ und $f\colon\ I \to (0, +\infty)$.

(a) Falls $f(t) = (6t - 5 - t^2)^{1/2}$, finden Sie den Bing Bang t_* und den Big Crunch t^*.

(b) Falls $f(t) = 1 + t^{2/3}$, zeigen Sie, dass es eine physikalische Singularität gibt, d.h. eine Zeit t_* mit $\rho(t) \to +\infty$ für $t \to t_*$, aber keinen Big Bang oder Big Crunch.

Aufgabe 56: Es sei $M(0, t^{2/3}) = (0, +\infty) \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^3$ die Friedmann-Kosmologie mit $k = 0$ und $f(t) = t^{2/3}$. Wir nehmen an, dass die Hubble-Konstant derzeit, also zur Zeit t_0, genau $H_0 = (18 \times 10^9)^{-1}$ beträgt.

(a) Wie alt ist unser Universum?

(b) Wie groß ist die derzeitige Dichte $\rho(t_0)$?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.