5. Übungsblatt -Integrale über Untermannigfaltigkeiten

Mehrfachintegrale

im WS 2014/2015 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Dienstag, den 10.2.15 bis 18 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 -Fläche eines Graphen (4 Punkte)

Welchen Flächeninhalt hat der Bereich $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ auf der Sattelfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = xy\}?$$

Aufgabe 2 - Volumen eines Torus (1+1+2 Punkte)

Es seien $0 < r < R$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &(\varphi, \psi) \mapsto ((R - r\cos\psi)\cos\varphi, (R - r\cos\psi)\sin\varphi, r\sin\psi) \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie $M = \operatorname{im} F$.

(b) Bestimmen Sie $U \subset \mathbb{R}^2$ so, dass $F|_U$ eine Parametrisierung von M liefert und $M \setminus F(U)$ eine endliche Vereinigung höchstens eindimensionaler Untermannigfaltigkeiten ist.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{vol}^2(M)$.

Aufgabe 3 - Reparametrisierung (4 Punkte)

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ und $G : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $H : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\det(dH(x)) > 0$ für alle $x \in V$ und $F \circ H = G$. Zeigen Sie: Für jede stetige Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\int_V \det(X \circ G, \frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n})(x)\, d^n x = \int_U \det(X \circ F, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n})(y) d^n y$$

Aufgabe 4 - Die Sphäre (4 Punkte)

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre und es sei $F : \mathbb{R}^n \to S^n$ die Abbildung, die einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den zweiten Schnittpunkt der Geraden durch $(0, x_1, \ldots, x_n)$ und $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass F eine Parametrisierung ist mit $S^n \setminus F(U) = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$ und geben Sie den Korrekturfaktor $\sqrt{g^F(x)}$ an.

Aufgabe 1

Sei $M := \{(x,y,z)|xy = z, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann ist $F(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung von M. Berechne die Gramsche Determinante.

$$g^F(x,y) = \det(DF^T(x,y) \cdot DF(x,y)) = \det \begin{pmatrix} 1+y^2 & yx \\ yx & 1+x^2 \end{pmatrix} = 1 + x^2 + y^2$$

Somit erhalten wir mit Definition 5.4 und der Definition des Volumens einer Untermannigfaltikeit

$$\begin{aligned} vol^2(M) = \int_M 1 \; dvol^2 &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{g^F} \, d^2x \\ &= \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, d^2x \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2} \, dr = (2\sqrt{2} - 1)\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(Korrigierte Version, siehe oben! In der ausgeteilten Version war ein Tippfehler, da waren einigen φ und ψ vertauscht. Deswegen wird diese Aufgabe in der Bewertung als Bonusaufgabe gezählt, da es mit der alten Version sehr schwierig wurde.)

(a) M hat die Form eines Torus mit Radien R und r. Konkret betrachten wir den Kreis in der xy-Ebene mit Radius R und M besteht aus den Kreisen mit Radius r um jeden Punkt dieses Kreises.

(b) Wähle als Bereich $\varphi \in (0, 2\pi), \psi \in (0, 2\pi)$. Dann werden nur zwei Kreise nicht getroffen, die jeweils eindimensionale Untermannigfaltigkeiten sind.

(c) Das Differential von F ist

$$DF = \begin{pmatrix} -(R - r\cos(\psi))\sin(\varphi) & -r\sin\psi\cos\varphi \\ (R - r\cos(\psi))\cos(\varphi) & -r\sin\psi\sin\varphi \\ 0 & r\cos\psi \end{pmatrix}$$

Die Gramsche Determinante ist dann

$$g^F(\varphi,\psi) = Det(DF^T \cdot DF) = \det \begin{pmatrix} (R - r\cos\psi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = r^2(R - r\cos\psi)^2$$

(d) Das Volumen ist dann gerade

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g^F(\varphi,\psi)} \, d\varphi d\psi = 4\pi^2 Rr$$

Aufgabe 3

Da $\det dH > 0$ ist, können wir in der Transformationsformel die Betragsstriche weglassen. Weiter schreiben wir $y = H(x)$ und bemerken, dass $U = H(V)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_V \det(X \circ G(x), \frac{\partial G}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(x))\, d^n x \\
&= \int_V \left\langle X \circ G(x), \frac{\partial G}{\partial x_1}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial G}{\partial x_n}(x) \right\rangle d^n x \\
&= \int_V \left\langle X \circ (F \circ H)(x), \frac{\partial (F \circ H)}{\partial x_1}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial (F \circ H)(x)}{\partial x_n} \right\rangle d^n x
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Kettenregel berechnet man nun

$$\frac{\partial (F \circ H)}{\partial x_1}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial (F \circ H)}{\partial x_n}(x) = \det(dH)\, \frac{\partial F}{\partial y_1}(y) \wedge \dots \wedge \frac{\partial F}{\partial y_n}(y).$$

(Im Fall von Flächen im $\mathbb{R}^3$ kann man das sehr leicht nachrechnen, wenn $\wedge$ gerade das Kreuzprodukt ist. In höheren Dimensionen funktioniert es genauso.)
Mit der Transformationsformel folgt dann direkt die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}
&\int_V \left\langle X \circ (F \circ H)(x), \frac{\partial (F \circ H)}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial (F \circ H)}{\partial x_n} \right\rangle d^n x \\
&= \int_V \left\langle X \circ (F \circ H)(x), \frac{\partial F}{\partial y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial F}{\partial y_n} \right\rangle \det(dH)\, d^n x \\
&= \int_U \det(X \circ F(y), \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n})(y)\, d^n y
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Abbildung F ist gerade die Umkehrung der Stereographische Projektion des Suedpols(fuer die Herleitung siehe z.B. Wikipedia), die gegeben ist durch

$$F(x_1, \dots, x_n) := \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

Als Umkehrung der Sterografischen Projektion ist die Abbildung bijektiv auf dem Bild $imF = S^n$. F sowie die Umkehrfunktion sind stetig und differenzierbar und somit ist F eine Einbettung, also auch eine Parametrisierung von S^n. Zur Berechnung des Korrekturfaktors ist

$$DF(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix}
\frac{2}{\|x\|^2+1} - \frac{4x_1^2}{(\|x\|+1)^2} & -\frac{4x_1x_2}{\|x\|^2+1} & \cdots & -\frac{4x_1x_n}{\|x\|^2+1} \\
\vdots & & & \\
-\frac{4x_nx_1}{\|x\|^2+1} & \cdots & -\frac{4x_nx_{n-1}}{\|x\|^2+1} & \frac{2}{\|x\|^2+1} - \frac{4x_n^2}{(\|x\|+1)^2} \\
-\frac{4x_1}{(\|x\|^2+1)^2} & \cdots & \cdots & -\frac{4x_n}{(\|x\|^2+1)^2}
\end{pmatrix}$$

Dann erhalten wir

$$DF^T \cdot DF = \begin{pmatrix} \frac{4}{(\|x\|^2+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{(\|x\|^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{(g^F)} = \sqrt{det(DF^T \cdot DF)} = \frac{2^n}{(\|x\|^2 + 1)^n}$$