1. Übungsblatt - Jordan-Volumen Mehrfachintegrale

im WS 2014/2015 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Dienstag, den 13.1.15 bis 18 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1: Flächenberechnung (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten $(0,0), (2,0)$ und $(0,2)$ Jordan-messbar ist. Bestimmen Sie die Fläche, indem Sie die Grenzwerte für das innere und äußere Maß berechnen.

(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar im Sinne der Analysis I/II mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$.
Zeigen Sie, dass $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], y \in [0, f(x)]\}$ Jordan-messbar ist mit $\mathrm{vol}^2(A) = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Aufgabe 2: Vereinigung Jordan-messbarer Mengen (1+1+2 Punkte)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ \subset (\overline{A} \setminus \mathring{A}) \cup (\overline{B} \setminus \mathring{B})$;

(b) Die Vereinigung von zwei Jordan-messbaren Mengen ist Jordan-messbar.

(c) Für die Vereinigung gilt die Volumenformel

$$\mathrm{vol}^n(A \cup B) = \mathrm{vol}^n(A) + vol^n(B) - \mathrm{vol}^n(A \cap B).$$

Aufgabe 3: Jordan-Volumen und Jordan-Nullmengen (2+2 Punkte)

(a) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so dass $A \setminus N \subset B \subset A \cup N$ gilt, dann ist B Jordan-messbar und $\mathrm{vol}^n(B) = \mathrm{vol}^n(A)$

(b) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 4: Jordan-Maß eines Graphen (2+2 Punkte)

(a) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $m \geq 1$ und $F : K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Wir betrachten den Graph

$$\mathrm{graph}(F) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; x \in K, y = F(x) \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{graph}(F)$ eine Jordan-Nullmenge ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es sei $v \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f, so dass $A = f^{-1}((-\infty, v])$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass A dann Jordan-messbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert beziehungsweise den Satz über implizite Funktionen.