

3. ÜBUNGSBLATT

PARAMETERINTEGRALE UND ANWENDUNGEN

MEHRFACHINTEGRALE

IM WS 2014/2015 BEI PD DR. E. SCHEIDEGGER

Abgabe Dienstag, den 27.1.15
bis 18 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 - Physik eines Quaders (4 Punkte)

Der Trägheitstensor eines Körpers K mit Dichte $\rho(x, y, z)$ ist definiert als das komponentenweise Integral

$$\int_K \rho(x, y, z) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitstensor des Quaders

$$K = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^3$$

mit konstanter Dichte $\rho(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass es ausreicht, für den Schwerpunkt eines der drei und für den Trägheitstensor zwei der neun einzelnen Integrale auszurechnen.

Aufgabe 2 - Integralsätze (1+2+1 Punkte)

Sei A Jordan-messbar und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ über A Riemann-integrierbar.

- Wir setzen $f_* = \inf_A f$ und $f^* = \sup_A f$. Zeigen Sie, dass dann die folgende Ungleichung gilt: $f_* \cdot \text{vol}^n(A) \leq \int_A f(x) d^n x \leq f^* \cdot \text{vol}^n(A)$.
- Zeigen Sie den folgenden Mittelwertsatz: Nimmt f jeden Wert zwischen f_* und f^* an, dann existiert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\int_A f(x) d^n x = f(x_0) \cdot \text{vol}^n A$
- Zeigen Sie die folgende Abschätzung für das Integral: Falls $|f(x)| < M$ für alle $x \in A$, dann gilt $|\int_A f(x) d^n x| \leq M \cdot \text{vol}^n A$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 - Einige uneigentliche Integrale (1+1+1+1 Punkte)

- (a) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ über Kreisscheiben B_R^2 für $R > 0$, und schätzen Sie damit das Integral von $f(x, y)$ über Quadrate $W_R^2 = [-R, R]^2$ nach oben und unten ab.
- (b) Benutzen Sie a), um zu zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.
- (c) Wir definieren die Gammafunktion als Parameterintegral mit $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ und folgern Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass $\Gamma(n+1) = n!$.
- (d) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 4 - Volumen von Kugeln (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der n -dimensionalen Kugel mit Radius R per Induktion nach der Dimension von n nach $n+2$. Die Werte für $n = 1, 2$ dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

Hinweis: Anwendung einer Folgerung aus dem Satz von Fubini.