4. Übungsblatt - Transformationsformel

Mehrfachintegrale

im WS 2014/2015 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Dienstag, den 3.2.15 bis 18 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 - Welche Koordinaten? (1+3 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Geraden

$$2x + 3y = 1\ ,\quad 2x + 3y = 3\ ,\quad x - 2y = 1\ ,\quad x - 2y = -2$$

berandete Parallelogramm.

(a) Skizzieren Sie Ω.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int\limits_{\Omega} 7yx\ dxdy$ durch Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation.

Aufgabe 2 - Flächeninhalt (4 Punkte)

Es sei $0 < a < b < c < d$. Zeichnen Sie den Bereich

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq ye^{-x} \leq b\, ,\, c \leq ye^{x} \leq d\right\}$$

und berechnen Sie den Flächeninhalt.

Aufgabe 3 - Trägheitsmoment (4 Punkte)

Berechnen Sie das polare Trägheitsmoment der Ellipse

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 25x^2 - 20xy + 13y^2 \leq 225\right\}$$

bezüglich des Ursprungs; also das Integral $\int_A (x^2 + y^2)\, dxdy$.
Hinweis: Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen konjugiert, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel sind zum anderen Durchmesser. Man verschaffe sich den zur x-Achse konjugierten Durchmesser und verwende eine geeignete Variablentransformation

Bitte wenden

Aufgabe 4 - Sphärische Koordinaten (1+1+1+1 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} F : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \psi) &\mapsto (r\cos(\varphi)\sin(\psi), r\sin(\varphi)\sin(\psi), r\cos(\psi)) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $\operatorname{im} F$.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante $|\det dF(r, \varphi, \psi)|$.

(c) Zeigen Sie, dass $F : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \operatorname{im} F$ ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an.

(d) Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_{B_R(0)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{a}{2}} \, dx \, dy \, dz$$

existiert. Berechnen Sie das Integral gegebenenfalls mit obigen Koordinaten.