5. Übungsblatt -Integrale über Untermannigfaltigkeiten

Mehrfachintegrale

im WS 2014/2015 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Dienstag, den 10.2.15 bis 18 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 -Fläche eines Graphen (4 Punkte)

Welchen Flächeninhalt hat der Bereich $B = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ auf der Sattelfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = xy\}?$$

Aufgabe 2 - Volumen eines Torus (1+1+2 Punkte)

Es seien $0 < r < R$ gegeben. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ &(\varphi, \psi) \mapsto ((R - r\cos\psi)\cos\varphi, (R - r\cos\psi)\sin\varphi, r\sin\psi) \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie $M = \operatorname{im} F$.

(b) Bestimmen Sie $U \subset \mathbb{R}^2$ so, dass $F|_U$ eine Parametrisierung von M liefert und $M \setminus F(U)$ eine endliche Vereinigung höchstens eindimensionaler Untermannigfaltigkeiten ist.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{vol}^2(M)$.

Aufgabe 3 - Reparametrisierung (4 Punkte)

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ und $G : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ Parametrisierungen einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $H : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\det(dH(x)) > 0$ für alle $x \in V$ und $F \circ H = G$. Zeigen Sie: Für jede stetige Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\int_V \det(X \circ G, \frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_n})(x)\, d^n x = \int_U \det(X \circ F, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_n})(y) d^n y$$

Aufgabe 4 - Die Sphäre (4 Punkte)

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre und es sei $F : \mathbb{R}^n \to S^n$ die Abbildung, die einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den zweiten Schnittpunkt der Geraden durch $(0, x_1, \ldots, x_n)$ und $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ zuordnet. Zeigen Sie, dass F eine Parametrisierung ist mit $S^n \setminus F(U) = \{(1, 0, \ldots, 0)\}$ und geben Sie den Korrekturfaktor $\sqrt{g^F(x)}$ an.