

Übungsblatt 1

1. Wir betrachten die Menge der Primzahlen $P := \{p \in \mathbb{N} \mid \exists! n \in \mathbb{N} : n \neq 1 \wedge n|p\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge der Primfaktoren $PF(n) := \{m \in \mathbb{N} \mid m|n \wedge m \in P\}$. Formulieren Sie folgende Aussagen ohne Worte, sondern nur mit Hilfe von Junktoren, Quantoren, Symbolen wie den Mengen \mathbb{N} , P , $PF(n)$, Symbolen für Variablen etc.
 - (a) (1 Punkt) Primfaktoren sind immer Primzahlen.
 - (b) (1 Punkt) Jede natürliche Zahl grösser als 1 besitzt mindestens einen Primfaktor.
 - (c) (1 Punkt) Primzahlen sind genau die Zahlen, die sich selbst als Primfaktor haben.
 - (d) (1 Punkt) Zahlen, die genau einen Primfaktor besitzen, sind nicht notwendigerweise Primzahlen.

2. Es seien X, Y, Z Mengen. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln mit Hilfe der Symbole der Mengenlehre (keine Diagramme):
 - (a) (1 Punkt) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.
 - (b) (1 Punkt) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
 - (c) (1 Punkt) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$, $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.
 - (d) (1 Punkt) $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$.

3. (4 Punkte) Die *Methode der vollständigen Induktion* ist durch folgenden Satz, der direkt aus den sogenannten Peano-Axiomen für \mathbb{N} folgt, beschrieben: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Wenn $A(0)$ wahr ist, und für alle $n \in \mathbb{N}$ aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt, dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Es sei X eine Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X ist definiert als die Menge aller Teilmengen von X . Es sei nun X eine Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mithilfe der Methode der vollständigen Induktion, daß folgende Aussage gilt: $\mathcal{P}(X)$ hat 2^n Elemente.

4. (4 Punkte) Fünf Häuser stehen in einer Reihe und tragen, von links nach rechts gelesen, die Hausnummern 1 bis 5. Jedes Haus hat eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt eine einzige Familie. Die Nationalitäten der Familien sind verschieden. Jede Familie bevorzugt ein bestimmtes Getränk, eine bestimmte Speise, und hält ein bestimmtes Haustier.

Die Farben sind: blau, gelb, grün, rot, weiss. Die Nationalitäten sind: Deutschland, Schweiz, Frankreich, Österreich, Polen. Die Getränke sind: Bier, Kaffee, Milch, Tee, Wasser. Die Speisen sind: Kartoffelauflauf, Nudeln, Reis, Gemüsesuppe, Rindsfilet. Die Haustiere sind: Fisch, Hund, Katze, Pferd, Vogel.

Folgendes ist bekannt:

- (a) Die französische Familie wohnt im roten Haus.
- (b) Die polnische Familie hält einen Hund.
- (c) Die Familie aus der Schweiz trinkt gerne Tee.
- (d) Das grüne Haus steht links vom weissen Haus.
- (e) Die Familie im grünen Haus trinkt gerne Kaffee.
- (f) Die Liebhaber von Reis halten einen Vogel.
- (g) Die Familie im mittleren Haus trinkt gerne Milch.
- (h) Die Familie im gelben Haus isst gerne Kartoffelauflauf.
- (i) Die österreichische Familie wohnt im ersten Haus.
- (j) Die Nudel-Liebhaber wohnen neben den Katzenhaltern.
- (k) Die Pferdebesitzer wohnen neben den Liebhabern von Kartoffelauflauf.
- (l) Die Liebhaber von Rindsfilets trinken gerne Bier.
- (m) Die österreichische Familie wohnt neben dem blauen Haus.
- (n) Die deutsche Familie mag Gemüsesuppe.
- (o) Die Nudel-Liebhaber haben Nachbarn, die gerne Wasser trinken.

Wem gehört der Fisch ? (Antwort mit Herleitung, d.h. einer Auflistung aller logischen Schlussfolgerungen.)

Abgabetermin: Donnerstag, 29. Oktober 2015 um 08:00 Uhr