Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 5

17. Es seien $(G, *)$, $(H, \bullet)$ Gruppen und $\varphi : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Es seien $e_G \in G$ und $e_H \in H$ die neutralen Elemente. Wir definieren den Kern von φ durch $\ker\varphi := \varphi^{-1}(e_G) \subset H$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) $\ker\varphi$ mit der Einschränkung von $\bullet$ ist eine Untergruppe von H.

    (b) (1 Punkt) $\operatorname{im}\varphi$ mit der Einschränkung von $*$ ist eine Untergruppe von G.

    (c) (2 Punkte) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker\varphi = \{e_H\}$.

18. Es seien $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \square)$, $(\mathbb{R}^2, \odot)$ und $\psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \square) \to (\mathbb{R}^2, \odot)$ wie in Aufgabe 12. Wir definieren folgende Mengen:

$$\begin{aligned} G &:= \{(r, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid r \neq 0\}, & \mathbb{C}^* &:= \psi(G), \\ H &:= \{(r, \varphi) \in G \mid r = 1\}, & S^1 &:= \psi(H), \\ H_m &:= \{(r, \varphi) \in H \mid \varphi = 2\pi q, q \in \mathbb{Q}, mq \in \mathbb{Z}\}, & \mathbb{Z}_m &:= \psi(H_m) \end{aligned}$$

    für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alle Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seien mit der Einschränkung von $\square$ und alle Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ seien mit der Einschränkung von $\odot$ versehen, die jeweils mit demselben Symbol bezeichnet seien.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß G eine abelsche Gruppe ist, und daß H und H_m abelsche Untergruppen von G bzw. H sind.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\mathbb{C}^*$ eine abelsche Gruppe ist, und daß S^1 und $\mathbb{Z}_m$ abelsche Untergruppen von $\mathbb{C}^*$ bzw. S^1 sind.

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $(\mathbb{Z}_m, \odot)$ isomorph zur zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ ist.

19. Es seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und S_m die symmetrische Gruppe auf m Elementen aus Aufgabe 14(b).

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß jede Permutation $\sigma \in S_m$ eine Darstellung als Komposition endlich vieler, disjunkter Zykel besitzt. (Zwei Zykel $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ und $\sigma' = (j_1, \ldots, j_{k'})$ heissen disjunkt, falls $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_{k'}\} = \emptyset$.)
   Hinweis: Betrachten Sie wiederholte Anwendungen von σ auf ein festes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Darstellung aus Aufgabe (a) für folgende Permutation $\sigma \in S_{15}$:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie diese Darstellung auch für σ^{-1}.

   (c) (1 Punkt) Es sei $\sigma \in S_m$ mit $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, eine Permutation dargestellt durch disjunkte Zykeln σ_i der Länge k_i, $i = 1, \ldots, r$ wie in Aufgabe (a). Zeigen Sie, daß gilt: $\operatorname{ord} \sigma = \operatorname{kgV}(k_1, \ldots, k_r) := \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \forall j : k_j | n\}$.

   (d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Darstellung aus Aufgabe (a) für folgende Permutation: $\sigma = ((124)(25)(368))^{10} \in S_9$.

20. Es seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und S_m die symmetrische Gruppe auf m Elementen aus Aufgabe 14(b).

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $A_m := \{\sigma \in S_m \mid \sigma \text{ gerade }\}$ versehen mit der Einschränkung von $\circ$ eine Untergruppe von S_m ist. A_m heisst die alternierende Gruppe auf m Elementen.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $|S_m| = m! := \prod_{k=1}^{m} k$ und bestimmen Sie $|A_m|$.
   Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion für die erste Aussage.

   (c) (2 Punkte) Es sei $P_n \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres n-Eck, d.h. alle Seitenlängen und alle Innenwinkel sind gleich. Eine Symmetrie von P_n ist eine Drehung um den Mittelpunkt von P_n oder eine Spiegelung an einer Achse durch den Mittelpunkt, die P_n mit sich zur Deckung bringt. Nummerieren wir die Ecken von P_n (z.B. im Gegenuhrzeigersinn) von 1 bis n, dann ist eine solche Symmetrie vollständig festgelegt durch die entsprechende Permutation der Ecken von P_n. Es sei $S(P_n) \subset S_n$ die Menge der Symmetrien von P_n. Geben Sie alle Elemente von $S(P_3)$ und von $S(P_4)$ an und zeigen Sie, daß $S(P_3)$ und $S(P_4)$ Untergruppen von S_3 bzw. S_4 sind.

Abgabetermin: Donnerstag, 26. November 2015 um 08:00 Uhr