Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 6

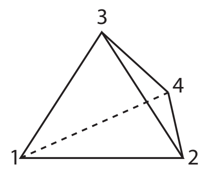
21. Es seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und S_m die symmetrische Gruppe auf m Elementen.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß für $k \geq 2$ jeder k-Zykel eine Komposition von $k-1$ Transpositionen (also von 2-Zykeln) ist. Betrachten Sie dazu zuerst 2- und 3-Zykel und benutzen dann vollständige Induktion. Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 19, daß jede Permutation als Komposition von endlich vielen Transpositionen geschrieben werden kann.

    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine Permutation genau dann gerade ist, wenn sie als Komposition einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann.

    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß jedes $\sigma \in S_m$ als Komposition endlich vieler Transpositionen der Form $\tau = (1, j)$ geschrieben werden kann.

22. Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Tetraeder, d.h. alle Kantenlängen sind gleich, siehe nebenstehende Skizze. Wir nummerieren die Ecken von T von 1 bis 4. Eine Drehsymmetrie von T ist eine Drehung von T um eine Achse durch den Mittelpunkt von T, die T mit sich zur Deckung bringt. Solch eine Drehsymmetrie ist vollständig festgelegt durch die entsprechende Permutation der Ecken von T (vgl. Aufgabe 20(c)).



    (a) (2 Punkte) Es sei $S(T) \subset S_4$ die Menge der Drehsymmetrien von T. Geben Sie alle Elemente von $S(T)$ an.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $S(T) = A_4$, wobei A_4 die alternierende Gruppe aus Aufgabe 20 ist.

23. Es sei $R := \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^3 : f(x+y) = f(x) + f(y)\}$. Für $f, g \in R$ sei $\forall x \in \mathbb{R}^3 : (f+g)(x) := f(x) + g(x)$, und $\circ$ sei die Komposition von Abbildungen.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $+$ und $\circ$ Verknüpfungen auf R definieren.

(b) (1 Punkt) Es seien $f(x_1, x_2, x_3) := (x_2, x_3, 0)$ und $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$. Zeigen Sie, daß $f, g \in R$ und bestimmen Sie $f \circ g, g \circ f, f \circ f, f \circ f \circ f$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß R ein nicht Nullteiler-freier, nicht-kommutativer Ring ist.

24. Es sei $m \in \mathbb{N}, m > 0$.

(a) (1 Punkt) Es seien X, Y endliche Mengen mit $|X| = |Y| = m$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind: (i) f ist injektiv. (ii) f ist surjektiv. (iii) f ist bijektiv.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 10, daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit Verknüpfungen $+, \cdot$ versehen werden kann, die von $\mathbb{Z}$ ererbt sind, so daß $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

(c) (1 Punkt) Es seien $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $f_a : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, [b] \mapsto [a] \cdot [b]$. Zeigen Sie, daß gilt: f_a ist für alle $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$ ein injektiver Gruppen-Homomorphismus von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ genau dann, wenn m eine Primzahl ist.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie mit Hilfe der Teilaufgaben (a) bis (c), daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn m eine Primzahl ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 3. Dezember 2015 um 08:00 Uhr