Aufgabe 49

K Körper , $A \in Mat_K(m \times n)$

Z.z $\forall A \in Mat_K(m\times n)$ $\exists$ $A_1, \dots, A_x \in Mat_K(m \times m)$ Elementarmatrizen und $B_1, \dots, B_y \in Mat_K(n \times n)$ Elementarmatrizen für $x, y \in \mathbb{N}$ sodass $A_1 \cdot \ldots \cdot A_x \cdot A \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_y$ in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens einen von Null verschiedenen Eintrag hat.

Bew

Theorem 3.4.8 (Gauß-Algorithmus)

$\Rightarrow$ $\exists$ $A_1, \dots, A_x \in Mat_K(m \times m)$: $\tilde{A} = A_1 \dots A_x A$ in Zeilenstufenform

~~Dh die Matrix $\tilde{A} := A_1 \dots A_x A$ hat in jeder Spalte höchstens einen von Null verschiedenen Eintrag.~~

Ziel: Finde $B_1, \dots, B_y \in Mat_K(n \times n)$ Elementarmatrizen, dass $\tilde{A} B_1 \dots B_y$ auch in jeder Zeile nur einen von Null verschiedenen Eintrag hat.

Vorüberlegung

Durch multipl. von $P_{ij}(\lambda)$ von rechts an eine Matrix A wird das λ-Fache der $i$ten Spalte zur $j$ten Spalte addiert.

Denn für $A = (v_1, \dots, v_n) \in Mat_K(m \times n)$, $v_i \in K^m$

gilt: $A P_{ij}(\lambda) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} 1 & & \overset{j}{\vdots} \\ & \ddots & \lambda \\ & & 1 \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_{j-1}, \lambda v_i + v_j, \dots, v_n)$

Matrixmultiplikation

Bestimmung der Matrizen $B_1, \dots, B_y$

Anschaulich sieht unser $\tilde{A}$ jetzt wie folgt aus:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_{1j_1} & a_{1j_1+1} & & \dots & & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \dots \; a_{rj_r} & a_{rn} \\ \vdots & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

- Mit den ersten B_1 bis B_{n-j_1} werden die $a_{1j_1+1}, \dots, a_{1n}$ elemeniert. Definiere B_k wie folgt für $k \in \{1, \dots, n-j_1\}$

$$B_k = \begin{cases} Id & \text{falls } a_{1k+j_1} = 0 \\ P_{j_1k}\left(\frac{-a_{1j_1}}{a_{1k}}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt $(\tilde{A} B_1 \dots B_{n-j_1})_{1t} = \begin{cases} a_{1j_1} & \text{falls } t = j_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Um die $a_{2j_2+1}, \dots, a_{2n}$ zu elemenieren wird analog vorgegangen.

Dieses Verfahren setzt man fort bis zur r-ten Spalte und erhält dadurch die gesuchten $B_1, \dots, B_y$ sodass für die Matrix

$$\tilde{A} B_1 \dots B_y = A_1 \dots A_x A B_1 \dots B_y$$

die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist.

$\square$

50.)

a) Berechne das Inverse A^{-1} der folgenden Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

<u>Gauß-Algorithmus:</u> $A \cdot A^{-1} = E_n$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}' = \mathrm{III} - \mathrm{I}]{\mathrm{II}' = \mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}' = \mathrm{III} - 4\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}' = \mathrm{II} - 2\mathrm{III}]{\mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 8 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -7 & 2 \\ -7 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

50.1

b) Berechne das Inverse A^{-1} der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Algorithmus: $A \cdot A^{-1} = E_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{III}' = \mathrm{III} - 3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}' = \mathrm{IV} - \mathrm{I}}]{\mathrm{II}' = \mathrm{II} + 2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{IV}' = \mathrm{IV} - 2\mathrm{II}]{\mathrm{III}' = \mathrm{III} - 2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}' = \mathrm{III} \cdot \frac{1}{8}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}' = \mathrm{IV} - 11\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{13}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{11}{8} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{IV}' = \mathrm{IV} \cdot 8} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}' = \mathrm{III} - \frac{5}{8}\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}' = \mathrm{II} + 3\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 37 & 19 & -33 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}' = \mathrm{II} + 5\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}' = \mathrm{I} - 4\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 0 & -51 & -24 & 44 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}' = \mathrm{I} - 3\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -27 & -12 & 23 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -24 & -11 & 21 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 & 6 & -11 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & -11 & 21 & -16 \\ -3 & -1 & 2 & -1 \\ -8 & -4 & 7 & -5 \\ 13 & 6 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lineare Algebra
Übungsblatt 13

Beachten Sie, dass in der Lösung die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ im Vergleich zur Aufgabenstellung vertauscht sind!

Aufgabe 3

$\mathcal{A} = \{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ $\quad$ $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}$ $\quad$ $M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

Um die Transformationsmatrix $M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$ zu berechnen, löst man folgendes Gleichungssystem:

$$e_1 = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$$
$$e_2 = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2$$

Die erste Gleichung ergibt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2$$

Einsetzen in die erste Formel ergibt

$$\alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

Analog erhält man $\beta_1 = -1$ sowie $\beta_2 = 1$.

$$M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Für die Transformationsmatrix $M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B})$ sind die Koeffizienten bereits durch die Vektoren in $\mathcal{B}$ gegeben: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist die Darstellung von v_1 zur Basis $\mathcal{A}$.
Es gilt:

$$M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Um die Rechnung zu Überprüfen kann man $M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A})^{-1}$ nachrechnen (es können aber auch beide Matrizen falsch sein aber die Gleichung trotzdem gültig). Mit dieser Gleichung berechnet man auch:

$$M(\mathcal{B}, F^2, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B}) \cdot M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B})$$
$$= M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B})$$
$$M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, F^2, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B})$$

Man kann also erst die Matrix $M(\mathcal{A}, F^2, \mathcal{A})$ berechnen und anschließend den Basiswechsel durchführen; Analoges ergibt sich damit auch für F^4. Alternativ kann man natürlich auch

erst die Matrix $M(\mathcal{B}, F, \mathcal{B})$ berechnen und dann quadrieren; Rechnungen mit Diagonalmatrizen sind aber einfacher.
Somit ergibt sich:

$$M(\mathcal{B}, F, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(\mathcal{B}, F^2, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$M(\mathcal{B}, F^4, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 & -130 \\ 65 & 146 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$\mathcal{A} = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}$
$\mathcal{B} = \{b_1 = 1, b_2 = x - 1, b_3 = (x-1)^2, b_4 = (x-1)^3\}$
$\quad = \{1, x-1, x^2 - 2x + 1, x^3 - 3x^2 + 3x - 1\}$

In der Vektoren-Schreibweise also:

$$\mathcal{A} = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

a) Wie in Aufgabe 3 ergibt sich die einfachere Transformationsmatrix $M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B})$ bereits direkt durch die Koeffizienten der Polynome:

$$M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{pmatrix}$ ergibt sich wieder durch die Lösung der Gleichungssysteme:

$$e_1 = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \alpha_3 \cdot b_3 + \alpha_4 \cdot b_4$$

$$e_2 = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \beta_3 \cdot b_3 + \beta_4 \cdot b_4$$
$$e_3 = \gamma_1 \cdot b_1 + \gamma_2 \cdot b_2 + \gamma_3 \cdot b_3 + \gamma_4 \cdot b_4$$
$$e_4 = \delta_1 \cdot b_1 + \delta_2 \cdot b_2 + \delta_3 \cdot b_3 + \delta_4 \cdot b_4$$

Es ergibt sich:

$$M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A})^{-1} = M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A})$ kann man das Ergebnis wieder überprüfen.

b) In den Spalten der Matrix $M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})$ steht das Bild des jeweiligen Basisvektors.

In der ersten Spalte steht also: $D(e_1) = 0 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die restlichen Spalten ergeben sich durch

$$D(e_2) = 1 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(e_3) = 2x \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(e_4) = 3x^2 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt also

$$M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und damit

$$M(\mathcal{B}, I, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, I, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Wie in Aufgabenteil b) berechnen wir die Matrix $M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B})$ nun direkt, hierbei geben wir die Vektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ an:

$$D(b_1) = 0 \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(b_2) = 1 \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(b_3) = 2x - 2 = 2 \cdot b_2 \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(b_4) = 3x^2 - 6x + 3 = 3 \cdot b_3 \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten:

$$M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix stimmt also mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil c) überein.